Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2009-2010**

Master 1 de Mathématiques **mardi 15 juin 2010**

Épreuve de Probabilités 2 (durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.
Tout matériel électronique est interdit.

Les trois exercices sont indépendants

Exercice I

Nous rappelons que par commodité d'écriture, nous écrivons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous forme de vecteurs lignes mais quand ils interviennent dans des calculs matriciels, ce sont des vecteurs colonnes.

1) Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que les variables aléatoires composantes X_i $(1 \leq i \leq 2)$ sont indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ si et seulement si la fonction caractéristique ϕ_X de X est de la forme

$$\phi_X(t) = \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2(t_1^2 + t_2^2)) \quad t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (*).$$

2) On considère le vecteur aléatoire $X' = AX$ transformé du vecteur aléatoire X par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Démontrer que les composantes X_1' et X_2' du vecteur X' dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont des variables aléatoires indépendantes.

3) En déduire que les variables aléatoires $\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$ et $Z = (X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2$ sont indépendantes.

4) Calculer explicitement les lois des variables aléatoires $\overline{X}$ et Z de la question 3).

Exercice II

Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $A \in \mathcal{F}$ un événement.

On notera $\mathbb{E}(Y|X)$ l'espérance conditionnelle de Y sachant X (lorsqu'elle existe) et on notera $\mathbb{P}(A|X) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|X)$.

I) Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On considère des variables aléatoires Z et X indépendantes. Montrer que la variable aléatoire $\phi(Z, X)$ a une espérance conditionnelle sachant X donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(\phi(Z, X)|X) = f(X) \ p.s.,$$

où $f(x) = \mathbb{E}(\phi(Z, x))$, $(x \in \mathbb{R})$ (indication : on pourra utiliser la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle). Dans la suite de l'exercice, on admettra que la formule précédente est encore vraie si $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et Z est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indépendant de la variable aléatoire X.

II) Soient $X, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ est i.i.d. et de loi uniforme et pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \mathbf{1}_{[Z_n \leq X]} \ .$$

1. Prouver que pour toute suite finie $(u_1, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^n$, on a

$$\mathbb{P}(Y_1 = u_1, \ldots, Y_n = u_n | X) = X^s(1-X)^{n-s} \ p.s.$$

   où $s = u_1 + \cdots u_n$.
2. Démontrer que $\mathbb{E}(Y_n|X) = \mathbb{P}(Y_n = 1|X)$ $(n \geq 1)$.
3. On pose $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Pour tout $n \geq 1$ trouver la valeur de $\mathbb{E}(S_n|X)$ et prouver que $\mathbb{E}((S_n - nX)^2|X) = nX(1-X)$ $p.s.$
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = X$ dans L^2 et en probabilité.

Exercice III

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ représentant les désintégrations radioactives enregistrées par un compteur Geiger, N_t étant le nombre de désintégrations qui se produisent pendant le temps t. On suppose $N_0 = 0$. Pour $t > 0$, on note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(N_s)_{s\leq t}$.

1) On pose $X_t = N_t - \lambda t$. Pour tout $t > 0$ et tout $h > 0$, calculer $\mathbb{E}(N_{t+h} - N_t|\mathcal{F}_t)$ et en déduire que

$$\forall t > 0, \ \forall h > 0, \ \mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t) = X_t \ (p.s.)$$

(on dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale à temps continu).

2) On suppose que le compteur Geiger a des ratés ; chaque atome qui se décompose n'est enregistré par le compteur qu'avec la probabilité p $(0 < p < 1)$. Soit Y_t le nombre de désintégrations qui sont détectées par le compteur jusqu'au temps t. On peut modéliser ce comportement de la façon suivante :
Soit $(\chi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p et indépendantes du processus $(N_t)_{t\geq 0}$. La variable χ_n vaut 1 si le $n$ième atome qui se désintégre est détecté et 0 sinon. On écrira donc

$$Y_t = \mathbf{1}_{[N_t > 0]} \sum_{k=1}^{N_t} \chi_k$$

1. Déterminer pour tout $t \geq 0$ fixé, la loi de probabilité de Y_t.
2. Déterminer la loi de probabilité du nombre de désintégrations non détectées $N_t - Y_t$ pendant le temps t.
3. Démontrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson dont on précisera l'intensité.