

Épreuve de Probabilités 1 (session 2, durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.

Tout matériel électronique est interdit.

Les 4 exercices sont indépendants

Partie I

Exercice 1 : Une entreprise met une petite annonce dans un journal concernant une offre d'emploi. Le nombre de personnes qui lisent la petite annonce est une variable X qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1000$. On suppose que chaque personne qui lit la petite annonce a une probabilité $p = 0,1$ d'être intéressée par l'offre d'emploi et d'être candidate à l'emploi proposé. On supposera que les lecteurs se comportent indépendamment les uns des autres. Soit Y le nombre de personnes qui seront candidates à cet emploi.

1) Quelle est la loi de Y sachant que $X = n$ (entier fixé) ? (on donnera l'expression des probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$ pour $k \in \mathbb{N}$).

2) Calculer la loi de probabilité de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $f(x) = kxe^{-\frac{x}{2}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

1) Déterminer la constante k pour que f soit une densité de probabilité.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même densité de probabilité égale à f . Calculer la densité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 3 : A l'occasion d'une élection, un million de personnes doivent se prononcer entre deux candidats A et B . On suppose que A a un comité de soutien composé de 2000 personnes qui voteront pour lui et que les autres personnes votent indépendamment les unes des autres.

1) On suppose que les personnes qui n'appartiennent pas au comité de soutien de A , sont indifférentes, c'est-à-dire qu'elles votent pour A avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou pour B avec probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Quelle est la probabilité que A l'emporte ?

b) Donner un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,99 pour la proportion d'électeurs qui voteront pour A ?

2) On suppose maintenant que les personnes qui n'appartiennent pas au comité de soutien de A , votent pour B avec la probabilité p ou pour A avec la probabilité $1 - p$ où $p \in]0, 1[$. Expliquer quelle doit être la valeur de p pour que B ait une probabilité supérieure à 0,99 d'être élu ? (on ne calculera pas explicitement cette valeur ; on déterminera seulement une condition algébrique simple qui permettrait de calculer p si on disposait d'une calculatrice).

On donne les valeurs numériques suivantes : Si on note $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, $F(2) = 0,9772$, $F(2,58) - F(-2,58) = 0,99$, $1 - F(-2,33) = 0,99$.

Exercice 4 : Le marché des services de téléphonie mobile de Norcadie (un pays du nord de l'Europe) est tenu par trois grands opérateurs A , B et C . La répartition est la suivante : A , B et C détiennent respectivement 30%, 50% et 20% du marché.

Pour augmenter ses abonnés le groupe A lance une campagne de publicité.

Après la campagne, on constate que parmi les anciens abonnés de A 50% sont toujours abonnés à A , 40% sont maintenant abonnés à B et 10% sont abonnés à C . Parmi les anciens abonnés de B , 70% sont toujours abonnés à B et 30% sont maintenant abonnés à A . Parmi les anciens abonnés à C , 80% sont toujours abonnés à C et 20% sont maintenant abonnés à A .

1) Décrire les changements occasionnés par la campagne de publicité par une chaîne de Markov à 3 états et en déduire l'état du marché après la campagne de publicité (on représente l'état du marché par la donnée des 3 pourcentages (a, b, c) où a (resp b , resp c) est le pourcentage des abonnés à l'opérateur A (resp. B , resp. C).

2) On suppose qu'une deuxième campagne de publicité donne les mêmes résultats que la première en termes de transferts d'abonnés. Quel est l'état du marché après cette deuxième campagne ?

3) Montrer qu'il y a un état limite du marché au bout d'un grand nombre de campagnes de publicité si on suppose que chaque campagne a toujours le même impact sur les abonnés (dans cette question on demande une modélisation adéquate en précisant explicitement les outils théoriques utilisés).