Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2008-2009**

Master 1 de Mathématiques et Master MIMATS **Janvier 2009**

Épreuve de Probabilités 1 (Durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.
Tout matériel électronique est interdit.

Les trois parties sont indépendantes

Partie I

On dispose de n pièces identiques telles que pour chacune la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. On lance ces n pièces et on récupère les X_1 pièces qui tombent sur pile, les autres pièces sont éliminées. On lance ensuite ces X_1 pièces et l'on ne garde que les X_2 qui tombent sur pile. On répète ainsi cette expérience en éliminant à chaque fois les pièces tombées sur face. Soit X_i le nombre de pièces restantes après i expériences.

1) En admettant que les événements relatifs à des pièces différentes sont indépendants, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 et sa fonction génératrice.

2) Calculer la loi de la variable aléatoire X_2 et en déduire quelle est sa fonction génératrice (indication : pour calculer $\mathbb{P}(X_2 = k)$ on pourra utiliser le système complet d'événements $[X_1 = i]$ $(i = 0, 1, \dots n)$).

3) Par la même méthode qu'à la question 2 déterminer la loi de probabilité de X_i.

4) Combien reste-t-il de pièces en moyenne au bout de i lancers ?

Partie II

Deux compartiments A et B contiennent des boules. À l'instant origine il y a $N \geq 2$ boules dans A et zéro boule dans B. Chaque seconde, on choisit une boule au hasard parmi les N boules et on la change de compartiment. Soit X_n le nombre de boules dans B à l'instant n.

1) Justifier brièvement que la suite $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ est une chaîne de Markov d'espace des états $E = \{0, 1, \dots, N\}$.

2) Déterminer le graphe de cette chaîne de Markov en précisant les probabilités de transition et faire la classification complète de ses états (classes d'éléments communicants, période des classes ergodiques et classes cycliques).

3) a) Montrer que cette chaîne de Markov a une loi stationnaire $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ qu'on déterminera explicitement (indication : on pourra montrer comment α_j $(j = 0, \dots, N)$ s'exprime en fonction de α_0 et utiliser la relation $\sum_{j=0}^{N} C_N^j = 2^N$). De quelle loi simple s'agit-il ?

b) Pour tout $i \in E$ quel est le temps moyen de retour de la chaîne en l'état i ?

4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{N-2}{N}\mathbb{E}(X_n)$, en déduire que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 1}$ converge et trouver sa limite. Donner une interprétation pratique de ce résultat.

Partie III

(Les trois questions sont indépendantes)

1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi normale centrée réduite définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $Z = \frac{X}{Y}\mathbf{1}_{[Y\neq 0]}$, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad Y(\omega) = 0, \\ \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} & \text{si} \quad Y(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

a) Justifier brièvement pourquoi Z est une variable aléatoire.

b) Sans calculer la loi de Z, démontrer que Z n'a pas de moment d'ordre 1 (indication : on pourra utiliser la loi dans $\mathbb{R}^2$ du vecteur (X, Y)).

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

2) Une personne a pris le métro 2 fois par jour, 200 jours par an pendant 30 ans. On suppose que chaque fois qu'un passager prend le métro, son temps d'attente est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ (l'unité est la minute).
Estimer le temps total (en jours) que la personne a passé à attendre le métro en donnant une borne inférieure et une borne supérieure pour ce temps total au niveau de confiance 0,997. On demande de modéliser le problème en précisant clairement les hypothèses conduisant au résultat trouvé (indication : on donne les valeurs numériques $\sqrt{1000} = 31,6$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt = 0,997$).

3) Soit $\delta > 0$ un nombre représentant une durée. À chaque instant multiple de $\delta > 0$ (i.e. $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$) un événement S (appelé succès) de probabilité $p > 0$ est susceptible de se produire. On suppose qu'il y a indépendance entre les événements qui se réalisent aux différents instants. Soit X l'instant du premier succès.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance $\mathbb{E}(X)$ et calculer la probabilité $\mathbb{P}(X > n\delta)$.

b) Soit $\alpha > 0$ une constante fixée. Pour chaque entier $m \geq 1$, on considère une variable aléatoire X_m du type précédent avec $\delta = \frac{1}{m}$ et $p = p_m$ tels que $\mathbb{E}(X_m) = \alpha$ (quelque soit m). Pour tout $t > 0$, déterminer la limite $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(X_m > t)$ et en déduire que la suite X_m converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle dont on déterminera le paramètre λ.

c) Donner une interprétation pratique du résultat précédent.