

Épreuve de Probabilités 2 (session 2, durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.

Tout matériel électronique est interdit.

Les 2 exercices sont indépendants

Exercice 1 : Une station de sécurité nucléaire enregistre la radioactivité atmosphérique au sommet d'une montagne. On sait par une longue et minutieuse étude statistique que la valeur mesurée R est toujours entachée d'une erreur (ou bruit) qu'on peut modéliser par une variable aléatoire B de loi normale centrée et de variance $t > 0$ et que la valeur observée est de la forme

$$R = tV + B$$

où V est la vraie valeur de la radioactivité. On sait que V est une variable aléatoire normale de moyenne m et de variance σ^2 et que V et B sont indépendantes.

1) Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le couple de variables aléatoires $(aR + bV, R)$ est un vecteur gaussien de \mathbb{R}^2 dont on précisera les caractéristiques vecteur moyenne et matrice des covariances.

2) Montrer que les variables $aR + bV$ et R sont indépendantes si et seulement si a et b vérifient une relation linéaire de la forme $a = -\frac{b\sigma^2}{t\sigma^2+1}$.

3) D'après le cours, la meilleure approximation de V au sens des moindres carrés en fonction de R est l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(V|R)$.

Démontrer que

$$\mathbb{E}(V|R) = \alpha R + \beta$$

où α et β sont des constantes que l'on déterminera explicitement en fonction de m , t et σ^2 . (indication : on pourra calculer $\mathbb{E}(aR + bV|R)$ en utilisant les constantes a et b de la question 2).

Exercice 2 : L'évolution d'une valeur boursière (action) est généralement modélisée par une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, où S_n , la valeur de l'action à l'instant n , vérifie

$$S_0 = s_0 > 0, \quad S_n = (1 + \mu)S_{n-1} + \sigma S_{n-1}\epsilon_n \quad (n \geq 1),$$

où $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi prenant deux valeurs $+1$ et -1 avec équiprobabilité (i.e. $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$) et μ et σ sont deux paramètres réels (appelés respectivement taux d'actualisation et coefficient de volatilité) qui satisfont la condition

$$|\sigma| < 1 + \mu.$$

On pose alors $\lambda = \sqrt{(1 + \mu)^2 - \sigma^2}$. On considère aussi la filtration naturelle $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1) Vérifier que pour tout entier n , on a $S_n \geq 0$ (indication : considérer la fonction $f(x, y) = (1 + \mu)x + \sigma xy$ aux points $(x, 1)$ et $(x, -1)$.)
- 2) a) Pour tout $n \geq 1$ montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_n - S_{n-1})$ s'exprime explicitement en fonction de S_{n-1} .
b) En déduire suivant les valeurs de μ si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale, une martingale ou une sur-martingale par rapport à sa filtration naturelle.
- 3) Pour tout entier n , on pose $Z_n = \ln(S_n)$. Démontrer que le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est, suivant les valeurs de λ , une sous-martingale, une martingale ou une sur-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 4) a) Démontrer que pour tout entier n , S_n est dans L^2 et calculer explicitement $\mathbb{E}(S_n^2)$ en fonction de s_0 , μ et σ .
b) A quelle condition $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle une martingale bornée dans L^2 ?
- 5) Démontrer que si $\lambda = 1$, on a $\frac{Z_n}{n} \rightarrow 0$ p.s. et en déduire que $(S_n)^{1/n}$ converge vers 1 presque sûrement quand $n \rightarrow +\infty$ (indication : on pourra utiliser la loi forte des grands nombres).