

Partiel de Probabilités 1 (Durée : 2 heures)

**épreuve sans document
 Tout matériel électronique est interdit.**

Les quatre exercices sont indépendants

Exercice 1

Trois urnes d'aspect identiques contiennent des boules blanches ou noires. La première urne contient 2 boules blanches et 1 noire, la deuxième 3 blanches et 1 noire et la troisième 2 blanches et 2 noires.

- 1) On choisit une urne au hasard et on en tire une boule. Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?
- 2) On choisit une urne au hasard, on en tire une boule, on la met de côté puis on recommence la même opération (c'est-à-dire on choisit à nouveau une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne). On a donc tiré 2 boules. Calculer la probabilité que les 2 boules soient blanches. (conseil : on insiste sur le fait que le premier tirage est sans remise. Avant d'effectuer les calculs, on désignera soigneusement les événements par des lettres puis on justifiera les calculs effectués par les théorèmes du cours qui seront utilisés).

Exercice 2

Une offre d'emploi d'électricien est publiée dans la rubrique petites annonces d'un journal. On suppose que le nombre X de personnes qui lisent les petites annonces est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 1000$ et que chacune de ces personnes a une probabilité $p = 0,1$ de candidater à l'offre d'emploi proposé. Soit Y le nombre de lecteurs qui seront candidats à l'emploi proposé.

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Sachant que $X = k$, quelle est la loi de probabilité de Y ?
- 2) Calculer la loi de probabilité de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels. On suppose que X a des moments de tous les ordres.

- 1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, Si la variable aléatoire $X(X-1)(X-2) \cdots (X-k+1)$ a un moment d'ordre 1. On pose alors :

$$E(X^{(k)}) := \mathbb{E}(X(X-1)(X-2) \cdots (X-k+1)).$$

Si $k = 0$, on pose par convention $E(X^{(0)}) := 1$.

2) Montrer que la fonction génératrice $G(t)$ de X peut s'écrire sous la forme :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(X^{(k)}) \frac{(t-1)^k}{k!}.$$

(indication : Dans l'expression $G(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i t^i$, on pourra poser $t^i = (t-1+1)^i$ pour faire apparaître les puissances de $t-1$).

3) Existe-t-il une variable aléatoire X telle que $E(X^{(k)}) = 1$ pour tout entier k ? Si oui, laquelle?

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ un schéma de Bernoulli représentant un jeu de pile ou face illimité avec une pièce bien équilibrée. On rappelle que X_n est le résultat du n -ième lancer et que $X_n = 1$ si c'est pile qui sort alors que $X_n = 0$ si c'est face. Le couple (X_n, X_{n+1}) constitué de deux résultats consécutifs sera appelé «paire» et noté simplement $X_n X_{n+1}$.

On s'intéresse à la première des paires 10, 01, 00 qui apparaîtra dans le déroulement du jeu (la paire 11 n'est pas considérée). Jean parie sur la paire 10, Pierre sur la paire 01 et Paul parie sur la paire 00. On veut savoir lequel des trois joueurs a la plus grande chance de gagner.

1) Expliquer comment on peut modéliser le problème par une chaîne de Markov absorbante à 5 états qu'on notera 0, 1, 10, 01 et 00 et où les états 10, 01 et 00 représenteront les états gagnants respectivement de Jean, Pierre et Paul. On précisera le graphe de cette chaîne.

2) Déterminer la matrice fondamentale de cette chaîne de Markov et en déduire les probabilités de gagner pour les trois joueurs.

3) Si Jean parie 2 euros, quel doit être la mise de Pierre et celle de Paul pour que le jeu soit équitable?