

Partiel d'Espaces de Hilbert, durée : 1 H 30

Les documents, calembrets et téléphones portables sont interdits

Le sujet comporte 5 questions indépendantes. L'énoncé ne doit pas être recopié sur la copie.

I) : Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie de nombres complexes. Démontrer que

$$1) \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} ; \quad 2) \left| \sum_{k=1}^n \sqrt{k} a_k \right| \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} .$$

II) : Soit E un espace préhilbertien sur \mathbb{C} muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Démontrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

III) : Soit H un espace de Hilbert, V_1 et V_2 deux sous-espaces fermés de H qu'on suppose orthogonaux (c'est à dire : $\forall x \in V_1, \forall y \in V_2, \langle x, y \rangle = 0$) et $V = V_1 \oplus V_2$ le sous-espace fermé somme directe de V_1 et V_2 (on ne démontrera pas que V est fermé). On note respectivement P_{V_1}, P_{V_2} et P_V les opérateurs de projection orthogonale sur V_1, V_2 et V . Pour tout vecteur $x \in H$, démontrer que

$$P_V(x) = P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x).$$

IV) : Dans le plan de la géométrie euclidienne rapporté à un système orthonormal, calculer la distance du point A de coordonnées (x_0, y_0) à la droite D d'équation $ax + by = 0$.

V) : Soit ℓ^2 l'espace de Hilbert des suites $x = (x_k)_{k \geq 1}$ de nombres complexes de carré sommable (i.e. $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty$), muni de son produit scalaire usuel donné par

$$\forall x, y \in \ell^2, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}.$$

a) Pour tout $x = (x_k)_{k \geq 1} \in \ell^2$, justifier que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}$ est bien convergente.

b) Démontrer que $V = \{x \in \ell^2; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k} = 0\}$ est un sous-espace fermé de ℓ^2 et déterminer son orthogonal V^\perp .

c) Pour tout $x \in \ell^2$, calculer la projection orthogonale de x sur V^\perp .