

Introduction aux espaces métriques.

*

1 Préambule

Qu'est-ce-qu'un espace métrique ?

Un espace métrique est un ensemble muni d'une notion de distance entre ses points. Par exemple l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels avec sa distance naturelle : $|x - y|$.

Quel est l'objectif de l'étude de ces espaces ?

La distance permet de définir la notion de convergence pour les suites (et les séries) et la notion de continuité pour les fonctions.

Ce cours concerne donc essentiellement **l'étude des fonctions continues** tout comme le cours de calcul différentiel s'occupe des fonctions différentiables et le cours d'intégration des fonctions *plus irrégulières*.

Quels sont les prérequis ?

Il est conseillé de réviser le cours d'analyse du L1 et du L2 car les techniques classiques qui y sont enseignées (convergence simple et uniforme des suites et des séries de fonctions, intégration et dérivation des fonctions classiques, etc...) vont servir de base à ce cours, en particulier pour les exemples. La notion d'ensemble dénombrable doit également être connue. Un polycopié de ces prérequis est disponible sur mon site :

<http://www.lmpt.univ-tours.fr/~gallardo>

Ces prérequis sont destinés aux étudiants du L3 en vue d'une lecture personnelle.

Plan de ce chapitre

- 1) Préambule
- 2) Vocabulaire de la théorie des ensembles
- 3) Applications et fonctions
- 4) L'ensemble \mathbb{R} des réels
- 5) Les nombres complexes
- 6) \mathbb{R}^d et la notion de distance.

*Notes du cours de L3 de M. L. Gallardo, Université de Tours. Cette introduction n'a pas été présentée dans le cours en amphitheâtre en 2009-2010. Elle contient des rappels très élémentaires auxquels l'étudiant pourra se reporter si nécessaire .

2 Vocabulaire de la théorie des ensembles

2.1 Ensembles et sous-ensembles

Soit E un ensemble quelconque composé d'éléments

Appartenance : Si x est élément de E , on note $x \in E$.

Sous-ensemble, inclusion : Tout ensemble A composé d'éléments de E est un sous-ensemble (ou partie) de E . On dit que A est inclus dans E et on note $A \subset E$.

Ensemble vide : C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément, il est noté \emptyset .

Détermination d'un sous-ensemble : En général un sous-ensemble A de E est déterminé par une propriété \mathcal{P} satisfaite par certains éléments de E , on écrit

$$A = \{x \in E; x \text{ satisfait } \mathcal{P}\}.$$

Exemple : Si $E = \mathbb{R}^3$,

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

est la sphère de centre l'origine et de rayon 1.

Ensemble des parties d'un ensemble : L'ensemble de tous les sous-ensembles de E est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. Il contient en particulier \emptyset et E comme éléments.

2.2 Opérations sur $\mathcal{P}(E)$

Soit I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

Réunion des A_i : C'est l'ensemble

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E; \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

(La phrase " $\exists i \in I, x \in A_i$ " se lit : « il existe i dans I tel que $x \in A_i$ »).

Intersection des A_i : C'est l'ensemble

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E; \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Cas particuliers :

- si $I = \{1, 2, \dots, N\}$ ($N \geq 1$ entier fixé), on a la réunion (resp. l'intersection) de N sous-ensembles de E .
- si $I = \mathbb{N}$, on a une réunion (resp. intersection) dénombrable des A_i .
- On notera que l'ensemble des indices I peut être quelconque, la réunion (resp. intersection) des A_i , $i \in I$ est toujours possible. Par exemple si $E = \mathbb{R}$, $I = [0, 1]$ et $A_i = [0, i]$, on a (exercice facile) :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = [0, 1] \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{0\}.$$

Complémentaire : Si $A \subset E$, le complémentaire de A (dans E) est l'ensemble A^c (noté aussi \bar{A}) défini par

$$A^c = \{x \in E, x \notin A\}.$$

Propriétés conjointes des opérations : Soit $A \subset E$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . On a

- $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$
- $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$
- $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$.

3 Applications, fonctions (Rappels)

Soient E_1 et E_2 des ensembles. Une **application** $f : E_1 \rightarrow E_2$ est une opération qui à chaque élément $x \in E_1$ fait correspondre un élément unique $f(x) \in E_2$. Si les E_i ($i = 1, 2$) sont des espaces numériques \mathbb{R}^d ou \mathbb{C} on parle plutôt de **fonction** que d'application.

• **Image inverse** : Pour tout $y \in E_2$, l'image inverse de y par f est le sous-ensemble de E_1 :

$$f^{-1}(y) = \{x \in E_1; f(x) = y\}.$$

• **surjectivité** : f est surjective si

$$\forall y \in E_2, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

• **injectivité** : f est injective si

$$\forall x, y \in E_1, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

ou ce qui est équivalent

$$x, y \in E_1 \text{ et } f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

• **bijektivité** : f est bijective si f est à la fois surjective et injective.

• **Ensemble dénombrable** : Un ensemble E est dénombrable s'il existe une application bijective de E sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels (voir le poly de prérequis). Par exemple :

- \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et plus généralement \mathbb{Z}^d et \mathbb{Q}^d (d entier ≥ 1) sont dénombrables.
- Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- $[0, 1]$, \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^d , \mathbb{C}^d ne sont pas des ensembles dénombrables.

4 L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels

4.1 Quelques rappels importants

On suppose connues les principales propriétés algébriques de \mathbb{R} (structure de corps avec les deux opérations $+$ et \times) ainsi que ses sous-ensembles remarquables \mathbb{N} (des entiers naturels), \mathbb{Z} (des entiers relatifs) et \mathbb{Q} (des nombres rationnels). Les rappels qui suivent sont bien connus mais il est indispensable d'en avoir une idée très claire et précise :

• **Relation d'ordre** : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ équivaut à $0 \leq y - x$ et on dit que y **major**e x ou encore que x **min**ore y .

• **Majorant** : un sous-ensemble A de \mathbb{R} est **majoré** (resp. **minoré** s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que

$$\forall x \in A, x \leq M \quad (\text{resp.} \quad \forall x \in A, m \leq x).$$

• **Propriété de la borne supérieure** : Toute partie A majorée admet une *borne supérieure* c'est à dire un majorant M (noté $M = \sup A$) tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, M - \epsilon \leq x \leq M.$$

(c'est la propriété caractéristique de la borne sup).

De même toute partie minorée admet une borne inférieure dont on laisse le soin au lecteur d'explicitier la propriété caractéristique.

• **Valeur absolue** : La valeur absolue de tout $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

4.2 Distance et valeur absolue

La distance usuelle $d(x, y)$ entre les réels x et y est définie par

$$d(x, y) = |x - y|$$

• Propriétés de la distance : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Exercice : démontrer la propriété 3) (indication : examiner les positions relatives des points x, y, z et procéder par examen des cas).

• **Utilité de la distance** : Elle sert à définir la convergence des suites et des séries

Rappel : Une suite de réels (x_n) converge vers une limite $x \in \mathbb{R}$ si $d(x_n, x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Précisément :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_n - x| \leq \epsilon.$$

4.3 Approximations décimales d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un entier relatif $N \in \mathbb{Z}$ tel que $N \leq x < N + 1$. Cet entier N est la **partie entière** de x et on a donc $x = N + a$, où $a \in [0, 1[$ est la **partie fractionnaire** de x .

Le nombre a admet un développement décimal

$$a = 0, d_1 d_2 \dots d_k \dots$$

où $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ est la k -ième **décimale** de a . Précisément cela signifie que

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \quad (\text{série convergente})$$

• **Exemple** : $\sqrt{2} = 1, 4142136 \dots$. Ici $N = 1$, $a = 0, 4142136 \dots$ ($d_1 = 4$, $d_2 = 1$, $d_3 = 4$, etc ...)

On peut utiliser une autre base. Par exemple la base 2. Dans ce cas

$$a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \quad (\text{série convergente})$$

où $a_k \in \{0, 1\}$ est la k -ième **décimale binaire** de a .

• **n-ième approximation décimale** : Le nombre

$$D_n = 0, d_1 d_2 \dots d_n = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k}$$

est la n -ième approximation décimale de a et vérifie pour tout $n \geq 1$:

$$|D_n - a| \leq \frac{1}{10^n}$$

(et en particulier $D_n \rightarrow a$ si $n \rightarrow +\infty$).

• **Unicité de la représentation décimale** : Les nombres décimaux (i.e. ceux de la forme $\sum_{k=1}^a \frac{d_k}{10^k}$) ont deux représentations décimale ; l'une se terminant par des 9, l'autre par des 0. Par exemple

$$\frac{1}{2} = 0, 50000 \dots$$

mais aussi

$$\frac{1}{2} = 0, 49999 \dots$$

Tous les autres nombres admettent une représentation unique. Donc si **par convention** on interdit les représentations se terminant par des 9, la représentation décimale d'un nombre $a \in [0, 1[$ est unique.

Exercice : Utiliser la représentation décimale d'un nombre réel pour montrer que l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. En déduire que \mathbb{R} et \mathbb{C} ne sont pas dénombrables (voir le poly de Prérequis).

5 Les nombres complexes (Rappels)

On suppose connues les propriétés algébriques de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes (\mathbb{C} est un corps pour les opérations $+$ et \times). Rappelons que tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit

$$z = x + iy \quad \text{avec } x \text{ et } y \text{ réels (écriture cartésienne),}$$

où $x = \operatorname{Re}z$ est la partie réelle et $y = \operatorname{Im}z$ la partie imaginaire de z et

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\text{écriture trigonométrique),}$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ (défini à 2π près) est l'argument de z .

5.1 Distance usuelle sur \mathbb{C}

On définit la distance entre deux points $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ de \mathbb{C} (avec leur écriture cartésienne) par

$$d(z, z') = |z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

• **Propriétés de la distance** : pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, on a

- 1) $d(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$.
- 2) $d(z, z') = d(z', z)$ (symétrie).
- 3) $d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z')$ (inégalité triangulaire).

Exercice : Vérifier ces trois propriétés.

• **Suites de nombres complexes** : On dit qu'une suite (z_n) de nombres complexes converge vers $z \in \mathbb{C}$ si $d(z_n, z) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Précisément si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |z_n - z| \leq \epsilon.$$

Exemple : Soit $a \in \mathbb{C}$ et (z_n) la suite définie par $z_n = a^n$. Alors :

- i) si $|a| < 1$, la suite (z_n) converge vers 0.
- ii) si $|a| \geq 1$, la suite (z_n) ne converge pas sauf si $a = 1$ (auquel cas elle est constante).

Exercice : Une suite (z_n) de nombres complexes converge vers $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\operatorname{Re}z_n \rightarrow \operatorname{Re}z \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}z_n \rightarrow \operatorname{Im}z \quad \text{si } n \rightarrow +\infty.$$

• **Le critère de Cauchy** : Ce critère est utile pour montrer qu'une suite (ou une série) converge sans connaître *a priori* sa limite. Il s'énonce comme suit

Théorème 5.1 : Une suite (z_n) de \mathbb{C} est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| \leq \epsilon.$$

On utilise surtout ce critère pour montrer qu'une série de nombres complexes est convergente :

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \leq \epsilon.$$

Application : Soit $\sum u_n$ une série de nombres complexes telle que la série de réels positifs $\sum |u_n|$ soit convergente. Alors la série $\sum u_n$ est convergente (pour résumer, toute série absolument convergente est convergente).

Remarque : Si vous ne vous sentez pas très à l'aise avec les séries, veuillez réviser d'urgence vos cours de L1 et de L2.

5.2 Sous ensembles de \mathbb{C}

• **Exercice :** En assimilant le nombre complexe $z = x + iy$ au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, représenter explicitement les ensembles suivants :

$$A_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x > 1 \text{ et } |z| \leq 2\}$$

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| \geq 3\}$$

$$A_3 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| + |z - 2| \leq 1\}$$

$$A_4 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| + |z - 2| \leq 2\}$$

• **Disque du plan complexe :** Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$$

est le **disque fermé** de centre z_0 et de rayon r et l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$$

est le **disque ouvert** de centre z_0 et de rayon r ; on le notera $D(z_0, r)$.

• **Ensemble ouvert :** Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est un **ensemble ouvert** si

$$\forall z_0 \in A, \exists r > 0, D(z_0, r) \subset A.$$

Exercices : 1) Montrer qu'un disque ouvert est un ensemble ouvert.

2) Montrer que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ est ouvert.

3) L'ensemble $\{z = x + iy \in \mathbb{C}; x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$ est-il ouvert ?

6 L'espace \mathbb{R}^d (d entier ≥ 2)

On considère l'espace \mathbb{R}^d des d -uplets (x_1, \dots, x_d) de nombres réels. C'est un espace vectoriel pour les opérations usuelles :

- $(x_1, \dots, x_d) + (y_1, \dots, y_d) = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$ (addition)
- $\lambda(x_1, \dots, x_d) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplication par un scalaire)

Définition 6.1 : Une application $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une distance sur \mathbb{R}^d si pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, elle vérifie les trois axiomes suivants :

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

6.1 La distance euclidienne

Pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans \mathbb{R}^d , la distance euclidienne $d_2(x, y)$ de x à y est définie par

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}.$$

Les propriétés 1) et 2) de la définition sont triviales. La propriété 3) est plus délicate, elle résulte de l'exercice suivant :

Exercice : 1) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans \mathbb{R}^d , démontrer que

$$\left| \sum_{i=1}^d x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^d y_i^2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz) (indication : utiliser le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^d (x_i + t y_i)^2 \geq 0$ et conclure par un argument élémentaire de trinôme du second degré).

2) En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^d y_i^2}$$

3) Conclure que d_2 satisfait l'inégalité triangulaire.

6.2 Autres distances sur \mathbb{R}^d

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans \mathbb{R}^d et pour un réel $p > 0$ fixé, on pose

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| \\ d_p(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \\ d_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

• **Exercice :** Montrer que d_1 , d_p et d_∞ sont des distances sur \mathbb{R}^d (indication : pour montrer que d_p est une distance on aura besoin des inégalités de Hölder et Minkowski de la feuille d'exercices 1).

• **Exercice :** Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y)$ (ce qui justifie la notation d_∞ !)