**Université de Tours**

**UFR Sciences et Techniques** **Année 2010-2011**

**Licence de Mathématiques L3** **mardi 10 mai 2011**

**Épreuve d'Espaces de Hilbert, session 1 (Durée : 3 heures)**

**Les documents et tout matériel électronique portable sont interdits**

*Le sujet comporte 2 exercices indépendants. Les énoncés ne doivent pas être recopiés sur la copie.*

## Exercice 1

**Rappel** : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction $2\pi$-périodique et dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est intégrable, sa série de Fourier peut s'écrire sous la forme cosinus-sinus :
$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \ + b_n \sin nx$
ou sous la forme exponentielles complexes :
$S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.
les coefficients de Fourier étant respectivement donnés par les formules : $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$ et $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$.

Dans toute cette partie $f$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de période $2\pi$ définie par

$$f(x) = |x| \quad \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Dans les questions 4) et 5), la restriction de $f$ à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sera notée $f$ également.

1) Sans calculer la série de Fourier $S(f)(x)$ de $f$, montrer à l'aide d'un résultat du cours (qu'on énoncera précisément) qu'elle converge simplement vers $f(x)$ en tous les points $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2) a) Montrer que $S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}\cos((2n-1)x)$
et préciser la valeur exacte de ses coefficients.
b) En déduire l'expression de $S(f)(x)$ sous forme exponentielles complexes.

3) a) La série de Fourier de $f$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$, ou seulement sur certains intervalles qu'on précisera ?
b) En déduire à l'aide d'un résultat du cours, qu'on énoncera précisément, que la série de Fourier de $f$ converge vers $f(x)$ en tous les points de la forme $x = k\pi$.
c) En déduire la valeur de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

4) Soit $V$ le sous espace de $L^2([-\pi, \pi])$ engendré par les fonctions $t \mapsto e^{int}$ pour $-3 \leq n \leq 3$. Calculer la valeur de $\inf_{g\in V} ||f - g||_2$. Cet inf est-il atteint ? si oui pour quelle fonction $g$ ? (on rappelle que la norme $||.||_2$ est définie par $||h||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt$ pour $h \in L^2([-\pi, \pi].)$

5) Soit $\phi$ l'application qui à une fonction $h \in L^2([-\pi, \pi])$ associe le nombre complexe

$$\phi(h) = \int_{-\pi}^{\pi} |t| h(t) dt$$

Vérifier que l'intégrale précédente est bien définie, montrer que $\phi$ est une forme linéaire continue sur $L^2([-\pi, \pi])$ et calculer sa norme.

## Exercice 2

Soit $\ell^2$ l'espace de Hilbert des suites $x = (x_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes de carré sommable muni du produit scalaire usuel $< x, y >= \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\overline{y_k}$.

On considère la base hilbertienne canonique $\mathcal{B} = \left\{e^{(n)};\ n \geq 1\right\}$ de $\ell^2$ dont on rappelle qu'elle est définie par

$$e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\geq 1} \quad \text{avec} \quad e_k^{(n)} = 0 \text{ si } k \neq n \text{ et } e_n^{(n)} = 1.$$

1) Rappeler comment on démontre précisément que $\mathcal{B}$ est une base hilbertienne de $\ell^2$.

2) Soit $V = \{x \in \ell^2;\ \forall k \geq 1,\ x_{2k} = 0\}$.
a) Démontrer que $V$ est un sous espace vectoriel fermé de $\ell^2$.
b) Déterminer une base hilbertienne de $V$.
c) Déterminer précisément l'orthogonal $V^\perp$ du sous espace $V$ et en donner une base hilbertienne explicite.

3) Soit $W$ l'ensemble des vecteurs $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell^2$ tels que $x_k = 0$ pour tout $k \geq N_x$ où $N_x$ est un entier dépendant de $x$. Autrement dit $W$ est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées sont nulles à partir d'un certain rang. Démontrer que $W$ est un sous-espace vectoriel dense dans $\ell^2$. .

4) Soit $f : \ell^2 \to \mathbb{C}$, l'application définie par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} x_k$$

a) Démontrer que $f$ est une forme linéaire continue sur $\ell^2$.
b) Soit $Kerf$ le noyau de $f$ (i.e. l'ensemble des $x \in \ell^2$ tels que $f(x) = 0$. Montrer $Kerf$ est un sous-espace fermé de $\ell^2$ et déterminer une base hilbertienne explicite de $Kerf$.
c) Déterminer une base hilbertienne de l'orthogonal de $Kerf$.

5) Soit $x = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$. Vérifier que $x \in \ell^2$, puis déterminer la projection orthogonale de $x$ sur $Kerf$ et sa projection orthogonale sur $(Kerf)^\perp$.