Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2010-2011**

Licence de Mathématiques L3 **jeudi 16 juin 2011**

Épreuve d'Espaces de Hilbert, session 2 (Durée : 3 heures)

Les documents et tout appareil électronique portable sont interdits

Le sujet comporte 2 exercices indépendants. Les énoncés ne doivent pas être recopiés sur la copie.

Exercice 1

Rappel : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique et dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est intégrable, sa série de Fourier peut s'écrire sous la forme cosinus-sinus :
$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \; + b_n \sin nx$
ou sous la forme exponentielles complexes :
$S(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.
les coefficients de Fourier étant respectivement donnés par les formules : $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$ et $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$.

D'autre part la norme de f est définie par $||f||_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dans tout l'exercice f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π définie par

$$f(x) = x^2 \quad \text{si} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

1) a) Calculer la série de Fourier $S(f)(x)$ de la fonction f sous la forme cosinus-sinus et préciser la valeur exacte de ses coefficients.
b) En déduire l'expression de $S(f)(x)$ sous forme exponentielles complexes.

2) a) La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément ?
b) Sans utiliser le théorème de Dirichlet (qui ne fait pas partie du cours), préciser les points $x \in \mathbb{R}$ où l'on a $Sf(x) = f(x)$.
c) En déduire la valeur de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^2}$.

3) Soit $g(x) = f(x) + \sin(x)$. En utilisant la formule de Bessel-Parseval déterminer sans calcul d'intégrale, la valeur de $||g||_2^2$.

4) Soit V le sous espace de $L^2([-\pi, \pi])$ engendré par les fonctions $t \mapsto e^{int}$ pour $-3 \leq n \leq 3$. Déterminer la projection orthogonale de la fonction g de la question 3) sur le sous-espace V.

Exercice 2

La question 1) est indépendante des questions 2) et 3).

Soit ℓ^2 l'espace de Hilbert des suites $x = (x_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes de carré sommable muni du produit scalaire usuel $< x, y >= \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$.

On considère la base hilbertienne canonique $\mathcal{B} = \left\{e^{(n)};\ n \geq 1\right\}$ de ℓ^2 dont on rappelle qu'elle est définie par

$$e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\geq 1} \quad \text{avec} \quad e_k^{(n)} = 0 \text{ si } k \neq n \text{ et } e_n^{(n)} = 1.$$

1) En utilisant le théorème de Riesz-Fréchet, peut-on préciser s'il existe une forme linéaire continue f sur ℓ^2 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(e^{(n)}) = 1$?

2) Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$v^{(n)} = e^{(2n-1)} + e^{(2n)}$$

et on considère le sous espace vectoriel $V = V[v^{(n)};\ n \geq 1]$ de ℓ^2 engendré par les vecteurs $v^{(n)}$ $(n \geq 1)$.
a) Vérifier que les $v^{(n)}$, $n \geq 1$, forment une famille orthogonale.
b) La famille des $v^{(n)}$, $n \geq 1$, est-elle totale ?
c) Démontrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} v^{(n)}$$

converge dans ℓ^2. On notera s la somme de cette série.
d) Est-ce-que s appartient à V ? Le sous espace V est-il fermé ?

3) On conserve les hypothèses de la question 2).
a) A quelle condition un vecteur $x \in \ell^2$ est-il orthogonal à V ?
b) En déduire l'orthogonal $V^\perp$ de V ; vérifier que c'est un sous espace fermé et déterminer une base hilbertienne de $V^\perp$.