

Exercices sur les opérateurs

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur.

1) Soit V un sous-espace vectoriel fermé de H invariant par T (i.e. $\forall x \in V, Tx \in V$). Alors le sous-espace V^\perp est invariant par l'adjoint T^* . (indication : pour $x \in V$ et $y \in V^\perp$, calculer $\langle Tx, y \rangle$)

2) a) On suppose que T est autoadjoint et que H est de dimension finie. On sait que T a au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ (théorème de Cayley-Hamilton vu en premier cycle). Soit V_λ le sous-espace propre associé. Montrer que la restriction T_1 de T à V^\perp est un opérateur autoadjoint de l'espace V^\perp dans lui-même.

b) En déduire que H est somme directe orthogonale de sous-espaces propres de l'opérateur T qui est donc diagonalisable.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H . Soit T un opérateur de H dans lui-même. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_{ij} := \langle Te_j, e_i \rangle.$$

1) Montrer que pour tout $j \geq 1$, $Te_j = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij} e_i$, où la série est convergente dans H .

2) Démontrer que pour tout $x \in H$, on a

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} \langle x, e_j \rangle \right) e_i,$$

où la série dans le membre de droite est convergente dans H .

3) En déduire que

$$\langle Tx, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} \langle x, e_j \rangle$$

On notera que cette formule montre que le i -ième coefficient (de Fourier) de Tx sur la base hilbertienne (e_n) , s'obtient comme en dimension finie en faisant le «produit» de la i -ième ligne de la matrice (a_{ij}) par la colonne des coefficients de Fourier de x . La matrice $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ à une infinité de lignes et de colonnes, est appelée matrice de l'opérateur T dans la base hilbertienne (e_n) .

4) Déterminer la matrice de l'opérateur adjoint T^* dans la base hilbertienne (e_n) .

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt autoadjoint. Soit y un vecteur donné dans H . On considère l'équation

$$(1) \quad Tx = y$$

1) Montrer que pour que l'équation (1) ait au moins une solution $x \in H$, il est nécessaire que $y \in \text{Ker}(T)^\perp$

2) On suppose que $y \in \text{Ker}(T)^\perp$ et soit $(\phi_n)_{n \in D}$ la famille orthonormale de vecteurs propres de T correspondant aux valeurs propres non nulles de T . Montrer que (1) a une solution si et seulement si

$$\sum_{n \in D} \frac{|\langle y, \phi_n \rangle|^2}{\lambda_n^2} < +\infty,$$

où λ_n est la valeur propre correspondant au vecteur propre ϕ_n .

3) En déduire que x est solution de (1) si et seulement si

$$x = \sum_{n \in D} \frac{\langle y, \phi_n \rangle}{\lambda_n} \phi_n + z,$$

où $z \in \text{Ker}T$ est arbitraire. En particulier si T est injectif, la solution est unique

Exercice 4

Soit $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($a < b$) une fonction continue telle que

$$\forall (s, t) \in [a, b]^2, k(s, t) = \overline{k(t, s)} \quad (*)$$

Pour toute $f \in L^2([a, b])$, on considère la fonction Kf définie pour $t \in [a, b]$ par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t, s) f(s) ds \quad (\text{opérateur à noyau } k).$$

D'après le cours on sait que K est de Hilbert-Schmidt et qu'il est autoadjoint car le noyau k vérifie la condition de symétrie hermitienne (*). Donc K est diagonalisable. On suppose que le système des valeurs propres-vecteurs propres de K $\{(\lambda_k, \phi_k); k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini.

1) a) Montrer que pour toute $f \in L^2([a, b])$ la fonction Kf est continue sur $[a, b]$.

b) En déduire que les fonctions propres ϕ_k sont continues.

2) Montrer que pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |\phi_k(t)|^2 \leq \int_a^b |k(t, s)|^2 ds.$$

3) En déduire que pour toute $f \in L^2([a, b])$, la série de fonctions

$$\sum_{k=n}^m \langle f, \phi_k \rangle \lambda_k \phi_k(t)$$

est uniformément convergente sur $[a, b]$ et que sa somme est égale à $Kf(t)$.

Exercice 5

Sur l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi, \pi])$, on considère l'opérateur intégral T qui à tout $x \in H$ associe la fonction Tx définie par

$$(Tx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds \quad (t \in [-\pi, \pi]).$$

- 1) Vérifier par calcul direct que $Tx \in L^2([-\pi, \pi])$ et que $\|T\| \leq \pi$.
- 2) Calculer l'adjoint T^* de T sans utiliser les théorèmes du cours.
- 3) Démontrer que pour tout $x \in L^2([-\pi, \pi])$, la fonction Tx est 2 fois dérivable et vérifie une équation différentielle qu'on précisera.
- 4) Donner une expression explicite de Tx de deux façons différentes :
 - i) en utilisant la question 3,
 - ii) par calcul direct.
- 5) Vérifier que T est (à une constante multiplicative près) un opérateur de projection orthogonale sur sous-espace vectoriel de $L^2([-\pi, \pi])$ qu'on précisera. En déduire la valeur exacte de $\|T\|$.
- 6) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T . Le théorème de diagonalisation s'applique-t-il à T ? Si oui, préciser la forme diagonale de T .
(indication : Dans les questions 5 et 6, on pourra utiliser la base hilbertienne des sinus-cosinus de $L^2([-\pi, \pi])$).

Exercice 6

Soit $f \in L^2([0, 1])$. On considère le problème aux limites

$$(2) \quad \begin{cases} x''(t) = f(t) \\ x(0) = x(1) = 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que (2) a une solution unique de la forme

$$(3) \quad x(t) = (Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

où

$$(4) \quad k(t, s) = \begin{cases} s(t-1) & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ t(s-1) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

- 2) Réciproquement, vérifier que pour toute $f \in L^2([0, 1])$, la fonction Kf définie en (3) est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et vérifie (2).

- 3) En déduire que 0 n'est pas valeur propre de l'opérateur K et que $\lambda \neq 0$ est valeur propre de K de fonction propre associée f si et seulement si $f \neq 0$ est deux fois dérivable et vérifie

$$(5) \quad \begin{cases} f''(t) - \frac{1}{\lambda} f(t) = 0 \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases}$$

- 4) Montrer que les seules valeurs de λ telles que (5) ait une solution non nulle sont de la forme $\lambda_k = -\frac{1}{\pi^2 k^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et que le sous espace propre de K associé à λ_k est de dimension 1 et engendré par la fonction $\phi_k : t \mapsto \phi_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t)$.

- 5) Que peut-on dire de la famille des fonctions ϕ_k ($k \geq 1$) de la question 4) relativement à l'espace $L^2([0, 1])$ et à l'opérateur K ?