

Epreuve d'Espaces métriques, session 2 (Durée : 3 heures)

Les documents et tout matériel électronique portable sont interdits

Le sujet comporte 3 exercices indépendants. Les énoncés ne doivent être recopiés sur la copie.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ($n = d^\circ P$), on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |P(x)|$$

- 1) Vérifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E .
- 2) Pour tout entier n , on considère le polynôme $P_n = X^n$.
 - a) La suite (P_n) est-elle une suite de Cauchy dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|_1)$?
 - b) La suite (P_n) est-elle une suite de Cauchy dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
 - c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
- 3) À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on associe le nombre réel $\phi(P) = \int_0^1 P(x) dx$.
 - a) Démontrer que l'application ϕ de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est linéaire et continue.
 - b) Calculer explicitement la norme $\|\phi\|$ de cette application linéaire.

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application Ψ définie pour $f \in E$ par :

$$\Psi(f)(x) = \cos(x) + \frac{1}{2\pi} \int_x^\pi \sin(t) f(t) dt \quad (x \in [0, \pi]).$$

- 1) Vérifier que $\Psi(f) \in E$.
- 2) Démontrer que l'application Ψ est lipschitzienne de constante de Lipschitz k dont on donnera une majoration qui montre clairement que $k < 1$.
- 3) Trouver toutes les solutions de l'équation fonctionnelle $\Psi(f) = f$ d'inconnue $f \in E$.

Exercice 3

Les 3 questions de l'exercice sont indépendantes

- 1) On considère \mathbb{R} comme espace métrique avec sa distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$) et soit le sous-ensemble $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - a) Déterminer explicitement (et rigoureusement) l'adhérence et l'intérieur de A dans (\mathbb{R}, d) .
 - b) A est-il connexe ? Sinon, déterminer précisément ses composantes connexes.

2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A un sous-espace vectoriel. On note (comme dans le cours) \bar{A} l'adhérence de A .

a) Démontrer que \bar{A} est un sous-espace vectoriel.

b) Montrer que si A est ouvert, alors $A = E$.

d) A est-il connexe? A est-il compact?

3) Soit $E = (E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact de E et F un fermé de E .

a) Démontrer que $K + F = \{z = x + y; x \in K \text{ et } y \in F\}$ est un fermé de E .

b) Montrer que si de plus F est compact, $K + F$ est compact