Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2009-2010**

Licence de Mathématiques L3 **Lundi 7 juin 2010**

Epreuve d'Espaces métriques, session 2 (Durée : 3 heures)

Les documents et tout matériel électronique portable sont interdits

Le sujet comporte 2 exercices indépendants. Les énoncés ne doivent être recopiés sur la copie.

Exercice 1

Soit ℓ^1 l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels telles que

$$||x||_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty.$$

On sait que l'application $x \mapsto ||x||_1$ est une norme sur ℓ^1 et que l'espace vectoriel ℓ^1 muni de cette norme est un espace de Banach.

Partie A

Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$, on pose

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

1) Justifier rigoureusement pourquoi $\phi(x)$ est un nombre réel bien défini.

2) Démontrer que l'application ϕ ainsi définie est une forme linéaire continue sur ℓ^1 et calculer précisément sa norme $|||\phi|||$.

3) Démontrer que l'application $x \mapsto (\phi(x))^2$ est une application continue de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas lipschitzienne sur ℓ^1.

4) On considère l'ensemble $A = \{x \in \ell^1 | \ \phi(x) = 1\}$.
a) Déterminer la valeur de

$$\sup_{x\in A} ||x||_1$$

b) L'ensemble A est-il compact ?

Partie B

Pour tout $x \in \ell^1$, on pose $||x||_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$.

5) Justifier brièvement que pour tout $x \in \ell^1$, $||x||_\infty < +\infty$ et que l'application $x \mapsto N(x) := ||x||_1 + ||x||_\infty$ est une norme sur ℓ^1.

6) a) Démontrer que les normes N et $||.||_1$ sont équivalentes sur ℓ^1.
b) L'espace ℓ^1 muni de la norme N est-il complet ?

7) Calculer la norme de la forme linéaire ϕ (définie dans la partie A) lorsque ℓ^1 est muni de la norme N.

Exercice 2

Les 3 questions de l'exercice sont indépendantes

1) On considère les ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -1 \leq xyz \leq 1\}$
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^4 + y^2 + |z| = 1\}$.

Préciser en justifiant rigoureusement votre réponse, ceux qui sont compacts et dire pourquoi les autres ne le sont pas.

2) On considère les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x+y)^2 = 1\}$
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy(x+y) = 0\}$
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy(x+y) = 0 \text{ et } (x+y)^2 = 1\}$

Préciser en justifiant rigoureusement votre réponse, ceux qui sont connexes et dire pourquoi les autres ne le sont pas et dans ce cas déterminer explicitement leurs composantes connexes.

3) Soient $a > 0$ et $b > 0$ des nombres fixés. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (ax, by).$$

a) Démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

b) En déduire que les espaces métriques

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\right\} \quad \text{et} \quad H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\},$$

qu'on munit tous les deux de la métrique induite par la métrique usuelle de $\mathbb{R}^2$, sont homéomorphes.

c) On considère l'ensemble

$$J = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2y^2 = 1\right\}$$

et on le munit de la métrique induite par la métrique usuelle de $\mathbb{R}^2$. Est-ce-que les espaces G et J sont homéomorphes ?