

Épreuve de Probabilités 2, 2-ième session (Durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.

Tout matériel électronique est interdit.

Les trois exercices sont indépendants

Exercice 1

1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la fonction caractéristique de X est donnée par la formule suivante :

$$\phi_X(t) = \frac{\sin(t/2)}{t/2} \exp(it/2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2) Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

a) Calculer la fonction caractéristique ϕ_n de la variable aléatoire Y_n .

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t)$ (indication : On pourra utiliser la formule $\prod_{k=2}^n \cos(t/2^k) = \frac{\sin(t/2)}{t/2} \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)}$, à condition de la justifier).

c) En déduire que la suite Y_n converge en loi quand $n \rightarrow +\infty$ vers une loi qu'on précisera.

d) Montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{X_k}{2^k}$ converge presque sûrement. Quelle est la loi de la somme de cette série ?

Exercice 2

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes.

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction borélienne. On suppose que la variable aléatoire $Z = f(X, Y)$ est dans L^1 . Démontrer alors que $\mathbb{E}(Z|X) = \phi(X)$, où ϕ est la fonction définie par $\phi(x) = \mathbb{E}(f(x, Y))$ ($x \in \mathbb{R}$) (indication : on utilisera la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle et le fait que tout événement de la tribu $\mathcal{B}(X)$ engendrée par X est de la forme $[X \in C]$ où C est un borélien de \mathbb{R}).

2) On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire bornée et que Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\exp(XY)|X)$ est bien définie et calculer sa valeur explicite.

3) Si Y est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, vérifier que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\cos(XY)|X)$ est bien définie et qu'elle est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(\cos(XY)|X) = \cos(\lambda \sin X) \exp(-\lambda(1 - \cos X)).$$

Exercice 3

Soit (X_0, X_1, \dots, X_d) un vecteur gaussien centré de \mathbb{R}^{d+1} non dégénéré. On note $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{0 \leq i, j \leq d}$ sa matrice des covariances.

1) Montrer que X_0 est une variable normale et que (X_1, \dots, X_d) est un vecteur gaussien centré de \mathbb{R}^d dont on précisera l'expression de la matrice des covariances.

2) Montrer que la variable aléatoire X_0 et le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) sont indépendants si et seulement si $\mathbb{E}(X_0 X_j) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, d$.

3) On pose $\tilde{X}_0 = X_0 - \sum_{i=1}^d a_i X_i$, où a_1, \dots, a_d sont des constantes réelles.

a) Montrer que $(\tilde{X}_0, X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien de \mathbb{R}^{d+1} dont on précisera la matrice des covariances.

b) Montrer qu'il existe des constantes a_1, \dots, a_d uniques telles que $\mathbb{E}(\tilde{X}_0 X_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$.

c) Soit \mathcal{B} la tribu engendrée par les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n . Déduire de la question 3) b) que $\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^d a_i X_i$, où les a_i sont les constantes trouvées en 3) b).