Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2009-2010**

Master 1 de Mathématiques et Master MIMATS **7 Janvier 2010**

Épreuve de Probabilités 1 (session 1, durée : 3 heures)

Documents et tout matériel électronique interdits. Un formulaire est joint au sujet.

Partie I

Les trois questions sont indépendantes

Question 1 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge et qu'alors on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

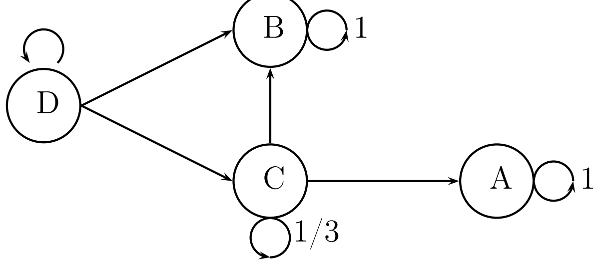
Question 2 : Un flux Poissonien d'appels téléphoniques arrive à un standard. La moyenne est de λ appels par unité de temps où $\lambda > 0$ est une constante fixée (on rappelle que ceci signifie que le nombre $X(t)$ d'appels reçus pendant un temps t est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt).
Pour améliorer la réception des appels, on crée deux standards (numérotés 1 et 2) et chaque appel qui arrive est alors distribué vers le standard n$^\circ$1 avec la probabilité p ou vers le standard n$^\circ$2 avec la probabilité $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$ est un réel fixé). On note $X_i(t)$ ($i = 1, 2$) le nombre d'appels reçus par le standard n$^\circ$i pendant le temps t.

a) Montrer que chaque variable aléatoire $X_i(t)$ ($i = 1, 2$) suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

b) Déterminer la loi du couple $(X_1(t), X_2(t))$. Les variables aléatoires $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont-elles indépendantes ?

Question 3 : On lance un dé régulier plusieurs fois de suite. Paul parie que le 1 et le 3 sortiront avant qu'un nombre pair apparaisse. Par exemple si les premiers lancers donnent $5, 1, 5, 1, 3$ alors Paul gagne ; par contre si on a $5, 3, 5, 5, 3, 2$ alors Paul a perdu.

a) Montrer qu'on peut représenter le jeu par une chaîne de Markov à 4 états de graphe :



où A désigne l'état gagnant pour Paul et B désigne l'état perdant pour Paul. Les états A et B sont absorbants. On donnera la signification des états D et C, on précisera les probabilités de transition non mentionnées sur le graphe ci-dessus et on expliquera la valeur $1/3$ pour la boucle en C.

b) Déterminer la matrice fondamentale de cette chaîne absorbante.

c) Calculer par 2 méthodes différentes la probabilité que Paul gagne son pari.

d) Calculer de 2 manières différentes la durée moyenne du jeu.

Partie II

Les deux questions sont indépendantes

Question 1 : Sur un échantillon de 100 pommiers, on récolte en moyenne $12,8$ kilos de pommes par arbre On modélise le poids de pommes récolté par arbre à l'aide d'une variable aléatoire X d'espérance m ; on suppose que la variance de la variable X est égal à 2.1 kg.

Déterminer une valeur de $\epsilon > 0$ telle que $\mathbb{P}[12,8 - \epsilon \leq m \leq 12,8 + \epsilon] \geq 0,95$

1. en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. en utilisant le théorème de la limite centrale (on rappelle dans ce cas que $\int_{-\infty}^{1,96} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,975$.)

Question 2 : On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Expliciter la loi du couple (X, Y). Donner l'espérance et la variance de ces variables aléatoires ainsi que $cov(X, Y)$.
2. On pose $U := X^2 + Y^2$ et $V := \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$. Montrer que la variable V est définie $\mathbb{P}$-presque sûrement et calculer la loi du couple (U, V) (on argumentera avec précision le changement de variable nécessaire)
3. Montrer que les variables U et V sont indépendantes et que U suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
4. Explicitez la loi de V. On dit que V suit une loi de l'arcsinus ; pourquoi ? Calculer l'espérance de V.