

Épreuve d'Espaces de Hilbert, session 2 (Durée : 3 heures)

Les documents et tous les appareils électroniques sont interdits.

*Les 2 exercices sont indépendants*

*Les énoncés des questions ne doivent pas être recopiés sur la copie*

**Exercice I**

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes

Soit  $\ell^2$  l'espace de Hilbert des suites  $x = (x_k)_{k \geq 1}$  de nombres complexes de carré sommable avec le produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$ . On note  $\{e^{(n)}; n \geq 1\}$  la base hilbertienne canonique de  $\ell^2$  (on rappelle que  $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k \geq 1}$  où  $e_k^{(n)} = 0$  si  $k \neq n$  et  $e_n^{(n)} = 1$ ).

**Partie A**

1) Pour tout  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$ , démontrer que la série suivante est convergente :

$$\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{16}x_4 + \dots + \frac{1}{4^n}x_{2n} + \dots$$

2) Démontrer que l'application  $\phi$  de  $\ell^2$  dans  $\mathbb{C}$  définie pour tout  $x \in \ell^2$  par

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n}x_{2n},$$

est une forme linéaire continue et calculer sa norme  $\|\phi\|$ .

3) Soit  $V = \{x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n}x_{2n} = 0\}$  et  $x \in \ell^2$  un vecteur fixé.

a) Justifier précisément pourquoi  $V$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\ell^2$ .

b) Calculer explicitement la projection orthogonale  $P_{V^\perp}(x)$  de  $x$  sur le sous-espace vectoriel fermé  $V^\perp$  et donner la valeur de sa norme  $\|P_{V^\perp}(x)\|$ .

c) Déterminer la projection orthogonale de  $x$  sur  $V$ .

**Partie B**

Pour tout  $x = (x_k)_{k \geq 1} \in \ell^2$ , on considère le vecteur  $Ax = y = (y_k)_{k \geq 1}$  où  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2 + x_3$ ,  $y_3 = x_4 + x_5$  et plus généralement :

$$y_n = x_{2n-2} + x_{2n-1} (n \geq 2).$$

1) Démontrer que  $Ax \in \ell^2$ .

2) Démontrer que l'application  $A : x \mapsto Ax$  est un opérateur continu de  $\ell^2$  dans lui-même et déterminer la valeur exacte de  $\|A\|$ .

3) a) Démontrer que l'opérateur  $A$  est surjectif.

b) Déterminer précisément le noyau de l'opérateur  $A$  et en donner une base hilbertienne.

## Exercice II

Dans tout l'exercice on considère l'espace de Hilbert  $H = L^2([-\pi, \pi])$  des classes de fonctions  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  muni du produit scalaire :  
 $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ . On rappelle que les fonctions  $e_n : t \mapsto e^{int}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) forment une base hilbertienne de  $H$ .

Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction fixée,  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^2$ .

1) (question de cours) Démontrer soigneusement que la série de Fourier de  $\phi$  converge uniformément vers  $\phi$  sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

On considère maintenant  $A$  l'opérateur défini sur  $H$  par

$$(Af)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t-s)f(s)ds \quad (f \in H).$$

2) a) Vérifier que pour toute fonction  $f \in H$ ,  $Af$  est dans  $H$  et donner un majorant explicite de la norme de l'opérateur  $A$ .

b) Montrer que pour toute  $f \in H$ ,  $Af$  est une fonction continue sur  $[-\pi, \pi]$  (indication : on pourra utiliser les théorèmes de continuité des intégrales avec paramètre vus en calcul intégral en vérifiant que leurs conditions de validité sont bien vérifiées).

3) a) Démontrer que les fonctions  $e_n : t \mapsto e^{int}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) sont des fonctions propres de l'opérateur  $A$  et déterminer explicitement la valeur propre  $\lambda_n$  associée.

b) En déduire soigneusement que pour toute  $f \in H$ , on a

$$Af = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n,$$

la convergence de la série ayant lieu au sens  $L^2$ .

4) Démontrer que la série précédente converge aussi uniformément sur  $[-\pi, \pi]$ .

5) a) À quelle condition suffisante sur les  $\lambda_n$ , l'opérateur  $A$  est-il injectif ?

b) À quelle condition suffisante sur les  $\lambda_n$ , l'opérateur  $A$  est-il auto-adjoint ?