Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2007-2008**

L3 de Mathématiques **Mardi 16 juin 2009**

Épreuve d'Espaces de Hilbert, session 2 (Durée : 3 heures)

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices sont interdits.

Les 2 exercices sont indépendants

Les énoncés des questions ne doivent pas être recopiés sur la copie

Exercice I

Soit ℓ^2 l'espace de Hilbert des suites $x = (x_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes de carré sommable avec le produit scalaire

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}.$$

On note $\left\{e^{(n)}; n \geq 1\right\}$ la base hilbertienne canonique de ℓ^2 (on rappelle que $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\geq 1}$ où $e_k^{(n)} = 0$ si $k \neq n$ et $e_n^{(n)} = 1$).

1) Soit a, un réel fixé et $n \geq 1$ un entier fixé. Montrer que l'application $f : \ell^2 \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = x_n + x_{n+1} + ax_{n+2}$ $(x \in \ell^2)$ est une forme linéaire continue dont on déterminera la norme $|||f|||$.

2) On considère l'ensemble

$$V = \left\{x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell^2; x_1 + x_2 = x_3\right\}.$$

a) Démontrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^2.

b) À l'aide de la forme explicite d'un vecteur $x \in V$, déterminer une base hilbertienne de V constituée de la famille $\{e^{(n)};\ n \geq 4\}$ et de deux vecteurs $v^{(1)}$ et $v^{(2)}$ qu'on déterminera explicitement (indication : on pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt appliqué à deux vecteurs convenables).

c) En déduire la forme explicite de la projection orthogonale sur V d'un vecteur quelconque $x \in \ell^2$.

d) Déterminer le sous-espace $V^\perp$. Quelle est sa dimension ?

Exercice II

Soit H un espace de Hilbert, $T : H \to H$ un opérateur continu et k une constante strictement positive.

1) On suppose que T vérifie la condition suivante

$$(C) \qquad \forall x \in H,\ < T(x), x >\in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad < T(x), x > \geq k||x||^2,$$

a) Montrer que pour tout $x \in H$, on a $||T(x)|| \geq k||x||$.

b) En déduire que $T(H) = \{T(x);\ x \in H\}$ est un sous espace vectoriel fermé de H.

c) Déterminer $T(H)^{\perp}$.

d) En déduire que l'opérateur T est inversible et que son inverse T^{-1} vérifie

$$||T^{-1}(x)|| \leq \frac{1}{k}||x||.$$

2) On suppose maintenant H séparable. Soit $\{e^{(n)}; n \geq 1\}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $x \in H$, on pose $x_n =< x, e^{(n)} >$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres réels. Pour tout $x \in H$, on pose

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n e^{(n)}.$$

a) Montrer que la série définissant $T(x)$ est bien une série convergente dans H.

b) Vérifier que T est un opérateur continu de H dans H et donner un majorant de sa norme.

c) Calculer l'adjoint T^* de l'opérateur T.

d) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

e) On suppose que pour tout $n \geq 1$, on a $\lambda_n \geq k$ où $k > 0$ est la constante du début de l'exercice. Montrer que l'opérateur T vérifie la condition (C) de la question 1).

f) Réciproquement, si T vérifie la condition (C), que peut-on dire de ses valeurs propres ?