Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2009-2010**

L3 de Mathématiques **lundi 3 mai 2010**

Épreuve d'Espaces de Hilbert, session 1 (Durée : 3 heures)

Les documents et tous les appareils électroniques sont interdits.

Les 2 exercices sont indépendants

Les énoncés des questions ne doivent pas être recopiés sur la copie

Exercice I

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes

Soit ℓ^2 l'espace de Hilbert des suites $x = (x_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes de carré sommable avec le produit scalaire $< x, y >= \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\overline{y_k}$. On note $\left\{e^{(n)}; n \geq 1\right\}$ la base hilbertienne canonique de ℓ^2 (on rappelle que $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\geq 1}$ où $e_k^{(n)} = 0$ si $k \neq n$ et $e_n^{(n)} = 1$).

Partie A

1) Montrer que $V = \{x \in \ell^2 | x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^2.

2) Déterminer une base hilbertienne de V (on pourra utiliser l'expression explicite des vecteurs $x \in V$ et la base hilbertienne canonique).

3) Déterminer explicitement $V^\perp$. Quelle est la dimension de $V^\perp$?

Partie B

Pour tout $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell^2$, on considère le vecteur $Ax = y = (y_k)_{k\geq 1}$ où $y_1 = x_1$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $y_3 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4$ et plus généralement :

$$y_n = \frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}x_{n+1} (n \geq 1).$$

1) Démontrer que $Ax \in \ell^2$ et que $||Ax||^2 \leq ||x||^2$.

2) Démontrer que l'application $A : \ x \mapsto Ax$ est un opérateur continu de ℓ^2 dans lui même et déterminer $|||A|||$.

3) Calculer explicitement l'adjoint A^* de A en précisant pour tout $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell^2$ les coordonnées de A^*x dans la base hilbertienne canonique de ℓ^2.

Exercice II

Les deux parties sont indépendantes.

Dans tout l'exercice l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi, \pi])$ des fonctions de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$, est muni du produit scalaire normalisé

$$\forall f, g \in H, \ < f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

On rappelle que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où $e_k : t \mapsto e^{ikt}$, est une base hilbertienne de H qu'on appellera base hilbertienne canonique. La décomposition de $f \in H$ dans cette base est appelée série de Fourier de f.

Partie A :

On considère l'ensemble $V = \left\{ f \in H | \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt = 0 \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt = 0 \right\}$.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de H.

2) Déterminer les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in V$ et en déduire une base hilbertienne de V.

3) Calculer explicitement le sous-espace $V^\perp$.

4) Calculer la projection orthogonale de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ sur le sous espace $V^\perp$.

Partie B :

À toute fonction $f \in H$, on associe la fonction Af définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi],\ (Af)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(u-t)du.$$

1) Montrer que $Af \in H$.

2) Démontrer que l'application $A : f \mapsto Af$ est un opérateur continu de H dans H et donner une estimation de $|||A|||$.

3) Calculer l'adjoint A^* de A.

4) Donner une expression simple de Af en fonction des coefficients de Fourier de f et des éléments de la base hilbertienne canonique. En déduire qu'à une constante multiplicative près, A est la différence de deux opérateurs de projection sur des sous-espaces qu'on précisera.

5) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur A. L'opérateur A est-il diagonalisable ?