

Chapitre 6: Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

*

18 mars 2008

1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

1.1 Généralités

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension $+\infty$ et $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de H .

Définition 1.1 : On dit que T est de Hilbert-Schmidt, s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de H telle que

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

Remarque : Qualitativement, la condition (1) signifie que pour n grand, le vecteur Te_n devient très petit, de telle sorte que la série des normes (1) converge. Noter que l'opérateur identité par exemple n'est pas de Hilbert-Schmidt.

Exercice : Soit (a_{ij}) la matrice de T dans la base hilbertienne (e_n) . Montrer que T est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$.

Proposition 1.2 : La condition (1) est intrinsèque à l'opérateur T . Autrement dit, si la condition (1) est vérifiée pour une base hilbertienne de H , alors pour toute base hilbertienne $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de H , on a aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} \|Tf_n\|^2 < +\infty$.

Proposition 1.3 : Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint T^* est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.

1.2 Exemples d'opérateurs de Hilbert-Schmidt

Exemple 1(Opérateurs diagonaux) : Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H et $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite fixée de nombres complexes telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Pour tout $x \in H$, posons

$$(2) \quad Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

*Notes du cours sur les espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Licence 3-ième année, Université de Tours, année 2007-2008. Les démonstrations sont données dans le cours oral.

Alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H et pour tout $k \geq 1$, $Te_k = \lambda_k e_k$ i.e. λ_k est une valeur propre et e_k un vecteur propre associé. Autrement dit la matrice de T dans la base hilbertienne (e_n) est diagonale et sa diagonale est composée des coefficients λ_n .

Exemple 2 (Opérateurs à noyau) : Soit $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($a < b$) une fonction continue.

Pour toute $f \in L^2([a, b])$, on considère la fonction Kf définie pour $t \in [a, b]$ par

$$(3) \quad (Kf)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds.$$

Alors K est un opérateur de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert $L^2([a, b])$ sur lui même. Donnons quelques détails :

Pour tout $t \in [a, b]$ fixé, notons k_t la fonction $s \mapsto k(t, s)$. En termes du produit scalaire de $L^2([a, b])$, on peut écrire

$$(4) \quad (Kf)(t) = \langle k_t, \bar{f} \rangle .$$

Considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2([a, b])$. D'après (4), on a $\|Ke_n\|^2 = \int_a^b |\langle k_t, \bar{e}_n \rangle|^2 dt$. D'où en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b |\langle k_t, \bar{e}_n \rangle|^2 dt \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle k_t, \bar{e}_n \rangle|^2 dt. \end{aligned}$$

Mais $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle k_t, \bar{e}_n \rangle|^2 = \|k_t\|^2$ (formule de Bessel-Parseval). Ainsi

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \int_a^b \|k_t\|^2 dt = \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty. \quad \text{Q.E.D.}$$

Remarque : Le résultat précédent est encore valable avec une hypothèse plus générale sur le noyau k . Il suffit de supposer que k est une fonction de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue de $[a, b]^2$ i.e. k est mesurable et vérifie

$$(6) \quad \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty.$$

2 Le théorème de diagonalisation

2.1 Le contenu du théorème

On sait (voir le chapitre 5) que tout opérateur autoadjoint sur \mathbb{C}^d est diagonalisable. En dimension infinie, ce résultat peut-être généralisé aux opérateurs de Hilbert-Schmidt autoadjoints; c'est ce que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Comme dans ce qui précède, H désigne un espace de Hilbert sur \mathbb{C} .

Théorème 2.1 (de diagonalisation) : Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt autoadjoint. Alors il existe une famille orthonormale finie ou infinie dénombrable $(\phi_n)_{n \in D}$ composée de vecteurs propres¹ de T telle que si λ_n est la valeur propre associée à ϕ_n , on a

$$(7) \quad \forall x \in H, \quad Tx = \sum_{n \in D} \lambda_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$$

(série convergente dans H si $D = \mathbb{N}^*$ et somme ordinaire si D est fini). De plus si l'ensemble $\{\lambda_n; n \in D\}$ est infini, on a $\sum_{n \in D} \lambda_n^2 < +\infty$.

Remarques importantes :

1) Comme T est autoadjoint, tous les λ_n de la formule (7) sont des réels d'après le théorème 1.13 du chapitre 5.

2) Attention, dans (7) les valeurs λ_n ne sont pas forcément distinctes deux à deux comme on peut le voir sur l'exemple d'un opérateur diagonal dans une base hilbertienne donnée de H (voir l'exemple 1 du paragraphe 1.2 où l'on prendrait les valeurs de λ_k non distinctes deux à deux).

3) Toutes les valeurs propres non nulles de T figurent dans la liste des λ_n ($n \in D$). En effet si $\lambda \neq 0$ était une valeur propre de T n'appartenant pas à $\{\lambda_n; n \in D\}$ et si ϕ est un vecteur propre associé, alors ϕ serait orthogonal à tous les ϕ_n ($n \in D$) d'après le théorème 1.13 du chapitre 5. D'après (7) on aurait donc $T\phi = \lambda\phi = 0$, ce qui est impossible.

4) Si $x \in \text{Ker}T$ (i.e. $Tx = 0$), alors pour tout $n \in D$, $\langle x, \phi_n \rangle = 0$ donc $x \in \left(\overline{V[\phi_n; n \in D]}\right)^\perp$ et inversement donc $\text{Ker}T = \left(\overline{V[\phi_n; n \in D]}\right)^\perp$. on obtient ainsi le corollaire suivant qui justifie le nom donné au théorème 2.1 :

Corollaire 2.2 En adjoignant à $\{\phi_n; n \in D\}$ une base hilbertienne de $\text{Ker}T$, on obtient une base hilbertienne de H dans laquelle l'opérateur T est diagonal.

Remarque : Si $T : H \rightarrow H$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt autoadjoint, on peut résoudre facilement les équations de la forme

$$(8) \quad Tx = y,$$

où y est un vecteur donné d'un espace de Hilbert H . C'est l'une des applications pratiques les plus importantes du théorème de diagonalisation comme nous le verrons dans les exercices.

Remarque : Le théorème de diagonalisation est valable pour une classe plus vaste d'opérateurs autoadjoints de l'espace de Hilbert H : les opérateurs compacts² qui seront étudiés dans le cours d'Analyse fonctionnelle en Master.

3 Annexe : démonstration du théorème de diagonalisation

La démonstration du théorème 2.1. est hors programme. Néanmoins elle est très instructive car elle met en oeuvre l'ensemble des techniques hilbertiennes

¹par définition non nuls.

²voir le livre de Kolmogorov et Fomine «éléments d'analyse fonctionnelle». Ellipses éditeur.

étudiées dans ce cours. De plus elle sera utile aux étudiants qui poursuivront leurs études en Master et a fortiori aux candidats à l'Agrégation en leur fournissant une motivation à l'étude plus générale des opérateurs compacts dont nous n'avons pas besoin ici. En effet la propriété de compacité des opérateurs de Hilbert-Schmidt³ est très naturelle à mettre en évidence sans qu'il soit nécessaire de la théoriser pour elle-même⁴. Commençons d'ailleurs par dire de quoi il s'agit :

On sait que, contrairement au cas de la dimension finie, les boules fermées d'un espace de Hilbert de dimension infinie ne sont pas des compacts, c'est à dire qu'étant donnée une suite bornée (x_n) dans H , on ne peut pas en général en extraire une sous-suite convergente. Néanmoins la suite (Tx_n) des images des x_n par T a toujours un meilleur comportement comme l'indique le résultat suivant :

Lemme 3.1 (*compacité d'un opérateur de Hilbert-Schmidt*) : Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt et $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de vecteurs de H , alors la suite $(Tx^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet toujours une sous-suite convergente.

démonstration : Si H est de dimension finie, le résultat est évident. Supposons donc $\dim H = +\infty$ et fixons une base hilbertienne⁵ $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de H . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on écrira

$$(9) \quad x^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^{(n)} \phi_k,$$

où $x_k^{(n)} = \langle x^{(n)}, \phi_k \rangle$ est la coordonnée d'ordre k de $x^{(n)}$ dans la base hilbertienne.

Par hypothèse, on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|x_n\| = M < +\infty.$$

On notera que pour tout $k \geq 1$ (fixé), la suite $(x_k^{(n)})_{n \geq 1}$ est bornée dans \mathbb{C} puisque $|x_k^{(n)}| = |\langle x^{(n)}, \phi_k \rangle| \leq \|x^{(n)}\| \cdot \|\phi_k\| \leq M$. De la suite $(x_1^{(n)})_{n \geq 1}$, on peut donc extraire une sous suite $(x_1^{(\psi_1(n))})_{n \geq 1}$ qui converge vers un nombre $x_1 \in \mathbb{C}$:

$$(10) \quad |x_1^{(\psi_1(n))} - x_1| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

De la suite $(x_2^{(\psi_1(n))})_{n \geq 1}$, on peut alors extraire une sous-suite $(x_2^{(\psi_2(n))})_{n \geq 1}$ qui converge vers un nombre $x_2 \in \mathbb{C}$:

$$(11) \quad |x_2^{(\psi_2(n))} - x_2| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

En poursuivant ainsi par récurrence, pour tout $k \geq 2$, il existe une suite croissante d'entiers $(\psi_k(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ extraite de la suite $(\psi_{k-1}(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et un nombre $x_k \in \mathbb{C}$, tels que

$$(12) \quad |x_k^{(\psi_k(n))} - x_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

³qu'on ne peut pas éviter dans la preuve

⁴La démonstration donnée ici est plus courte que celle qu'on peut trouver dans les livres (par exemple dans Kolmogorov et Fomine ou dans Young) qui considèrent le cas plus lourd des opérateurs compacts.

⁵rappelons que dans ce chapitre H est séparable par définition.

Notons que la suite extraite $(x^{(\psi_k(n))}) \in H$ est telle que ses k premières coordonnées convergent. Considérons alors la suite $(x^{(\psi_n(n))})$ qui est extraite de toutes les précédentes⁶. Alors toutes ses coordonnées convergent ; précisément pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$(13) \quad |x_k^{(\psi_n(n))} - x_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Attention on ne peut pas en conclure que la suite $(x^{(\psi_n(n))})$ converge dans H mais considérons la suite $(Tx^{(\psi_n(n))})$. Le lemme sera prouvé si on montre que cette suite est de Cauchy dans H . Soit $n < m$, et pour simplifier les notations écrivons

$$(14) \quad \alpha_k^{n,m} = x_k^{(\psi_n(n))} - x_k^{(\psi_m(m))}.$$

Pour tout entier $N > 1$ fixé, on peut écrire (puisque T est continu)

$$\begin{aligned} Tx^{(\psi_n(n))} - Tx^{(\psi_m(m))} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^{n,m} T\phi_k \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k^{n,m} T\phi_k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \alpha_k^{n,m} T\phi_k. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \alpha_k^{n,m} T\phi_k \right\| &\leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |\alpha_k^{n,m}| \cdot \|T\phi_k\| \\ &\leq \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} |\alpha_k^{n,m}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|T\phi_k\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x^{(\psi_n(n))} - x^{(\psi_m(m))}\| \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|T\phi_k\|^2 \right)^{1/2} \\ (15) \quad &\leq 2M \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} \|T\phi_k\|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Si on se donne $\varepsilon > 0$, comme T est de Hilbert-Schmidt, on peut choisir un entier $N > 1$ tel que la quantité (15) soit inférieure à $\varepsilon/2$. Pour ce N fixé, il est clair que la quantité $\left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k^{n,m} T\phi_k \right\|$ peut être rendue inférieure à $\varepsilon/2$ pour n, m assez grands. Dans ce cas, il en résulte qu'on a aussi $\|Tx^{(\psi_n(n))} - Tx^{(\psi_m(m))}\| \leq \varepsilon$. Q.E.D.

3.1 démonstration du théorème 2.1

Ici l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est de Hilbert-Schmidt et autoadjoint.

Lemme 3.2 : T admet toujours $\|T\|$ ou $-\|T\|$ comme valeur propre.

⁶on l'appelle la suite diagonale car le procédé d'extraction est le procédé diagonal de Cantor qu'on utilise fréquemment en analyse.

démonstration : On a $|||T||| = \sup_{\|x\|=1} | \langle Tx, x \rangle |$ d'après le théorème 1.11 du chapitre 5. Il existe donc une suite $(x_n) \in H$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} | \langle Tx_n, x_n \rangle | = |||T|||$. Mais comme $\langle Tx_n, x_n \rangle \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite qu'on continuera à noter (x_n) telle que

$$(16) \quad \langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda \quad (= |||T||| \text{ ou } -|||T|||).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme précédent, il existe une suite extraite $(x_{\psi(n)})$ et $y \in H$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_{\psi(n)} = y$. D'où aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda x_{\psi(n)} = y$ et en appliquant T qui est continu, $\lambda Tx_{\psi(n)} \rightarrow Ty$. Il en résulte que $Ty = \lambda y$. Or il est clair que $y \neq 0$. Donc λ est valeur propre de T .

Notons $\lambda_1 = (|||T||| \text{ ou } -|||T|||)$ la valeur propre construite dans le lemme précédent et soit ϕ_1 un vecteur propre associé, de norme 1. Comme l'espace vectoriel $V[\phi_1]$ engendré par ϕ_1 , est stable par T , son orthogonal $H_2 = V[\phi_1]^\perp$, est stable par $T^* = T$ d'après le lemme 1.15 du chapitre 5. Soit

$$(17) \quad T_2 = T|_{H_2},$$

la restriction de T à H_2 . Il est clair que T_2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt autoadjoint de l'espace de Hilbert⁷ H_2 . On peut à nouveau appliquer le lemme à T_2 et H_2 et on obtient une valeur propre $\lambda_2 = (|||T_2||| \text{ ou } -|||T_2|||)$ de T_2 donc de T et un vecteur propre de norme 1 $\phi_2 \in V[\phi_1]^\perp$. L'espace vectoriel $V[\phi_1, \phi_2]$ étant stable par T , son orthogonal $H_3 = V[\phi_1, \phi_2]^\perp$ est stable par T et on considère la restriction T_3 de T à H_3 , etc... Par récurrence, on construit ainsi une suite $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ de vecteurs propres de T correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ où λ_j est la valeur propre construite suivant le lemme 3.2 avec l'opérateur T_j restriction de T à $V[\phi_1, \dots, \phi_{j-1}]^\perp$. On continue la construction tant que $T_n \neq 0$. Distinguons donc deux cas :

premier cas : Supposons alors qu'il existe un entier m tel que $T_m = 0$. Comme on a⁸

$$(18) \quad \forall x \in H, \quad x - \sum_{j=1}^{m-1} \langle x, \phi_j \rangle \phi_j \in V[\phi_1, \dots, \phi_{m-1}]^\perp = H_m,$$

et que $TH_m = \{0\}$, alors $T \left(x - \sum_{j=1}^{m-1} \langle x, \phi_j \rangle \phi_j \right) = 0$, et on a donc

$$(19) \quad \forall x \in H, \quad Tx = \sum_{j=1}^{m-1} \langle x, \phi_j \rangle T\phi_j = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \langle x, \phi_j \rangle \phi_j,$$

et l'assertion du théorème est vraie avec une somme finie.

deuxième cas : Si pour tout entier n , $T_n \neq 0$, soit $x \in H$ et

$$(20) \quad x_n = x - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x, \phi_j \rangle \phi_j.$$

⁷pour le produit scalaire induit par H sur H_2 .

⁸par la propriété caractéristique de la projection

D'après Pythagore, $\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |\langle x, \phi_j \rangle|^2$, d'où $\|x_n\| \leq \|x\|$.
 Mais on a

$$(21) \quad \|Tx_n\| = \|T_n x_n\| \leq \|T_n\| \cdot \|x_n\| = |\lambda_n| \|x_n\|,$$

d'où

$$(22) \quad \|Tx - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \langle x, \phi_j \rangle \phi_j\| \leq |\lambda_n| \|x\|.$$

Mais $|\lambda_j|^2 = \|T\phi_j\|^2$, d'où $\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda_j|^2 < +\infty$ car T est de Hilbert-Schmidt. En particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = 0$ et l'inégalité précédente (22) implique

$$(23) \quad Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle x, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Le théorème est démontré.

Fin du cours 2007-2008 sur les espaces de Hilbert

Remarque à l'attention des lecteurs : Je remercie par avance toute lectrice (resp. tout lecteur) qui aura l'amabilité de me signaler d'éventuelles erreurs ou coquilles qu'elle (resp. il) aura pu découvrir dans l'ensemble de ces notes de cours et qui contribuera ainsi à la correction de l'édition de l'année prochaine.