Chapitre 5: Opérateurs dans les espaces de Hilbert. Notions d'opérateur adjoint

*[*]

18 mars 2008

1 Généralités sur les opérateurs

1.1 Définitions

Soient H et H' deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *: Toute application linéaire continue $T : H \to H'$ s'appelle un opérateur. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(H, H')$ des applications linéaires continues de H dans H' est l'espace des opérateurs de H dans H'.*

Notations : 1) Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in H$ par l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ sera généralement notée Tx mais la notation traditionnelle $T(x)$ sera parfois utilisée également.
2) La norme de T est le nombre

$$|||T||| = \sup_{||x||_H \leq 1} ||Tx||_{H'}; \tag{1}$$

c'est la norme usuelle assujettie aux normes de H et H'.
3) On notera $KerT$ le noyau de l'opérateur T i.e. $KerT = \{x \in H;\ Tx = 0\}$.
4) ImT désignera le sous-espace de H' image de H par T. On le notera aussi $T(H)$.

Remarque : $KerT$ (resp. ImT) est un sous-espace vectoriel de H (resp. de H'). On notera que $KerT$ est toujours un sous-espace fermé de H mais ImT n'est pas forcément fermé[1] dans H' (des exemples seront vus en TD).

1.2 Composé de plusieurs opérateurs

Soient H, H' et H'' des espaces de Hilbert et $T_1 \in \mathcal{L}(H, H')$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H', H'')$ des opérateurs. Considèrons l'opérateur composé $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(H, H'')$.

Proposition 1.2 *: On a $|||T_2 \circ T_1||| \leq |||T_2|||.|||T_1|||$.*

---

[*]Notes du cours sur les espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Licence 3-ième année, Université de Tours, année 2007-2008. Les démonstrations sont données dans le cours oral.

[1]ceci ne peut arriver que si $dimH' = +\infty$ car si $dimH' < +\infty$ tous ses sous-espaces sont fermés.

Remarque : Dans le résultat précédent les normes d'opérateur sont toujours celles définies en (1) c'est-à-dire les normes assujetties aux normes des espaces de Hilbert concernés par les opérateurs.

Application : Soit $U \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur de l'espace de Hilbert H dans lui même. On définit les puissances de l'opérateur U comme étant les opérateurs de H dans H définis de la manière suivante :
$U^0 = I$(l'opérateur identité), $U^1 = U$, $U^2 = U \circ U, \ldots,\ U^n = U \circ U^{n-1} = U^{n-1} \circ U\ (n \geq 1)$.

Corollaire 1.3 *: $\forall n \in \mathbb{N},\ |||U^n||| \leq |||U|||^n$.*

Corollaire 1.4 *: La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} U^n$ converge dans $\mathcal{L}(H, H)$. Sa somme est un opérateur de H dans H appelé exponentielle de l'opérateur U et noté e^U ou $\exp U$. Sa norme vérifie :*

$$|||\exp U||| \leq \exp\left(|||U|||\right). \tag{2}$$

1.3 Inverse d'un opérateur

Soient H et H' des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H, H')$ un opérateur.

Définition 1.5 *: On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(H', H)$ tel que*

$$A \circ B = I_{H'}, \quad \textit{et} \quad B \circ A = I_H, \tag{3}$$

où I_H (resp. $I_{H'}$) est l'opérateur identité de H (resp. de H'). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B := A^{-1}$.

Cas particulier où $H = H'$: Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Dans le cas où H est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de T a plusieurs aspects équivalents. Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant[2] :

Théorème 1.6 *: Si $\dim H < +\infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) T est inversible.
2) T est injectif.
3) T est surjectif.
4) T admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in \mathcal{L}(H, H)$ tel que $T \circ U = I_H$).
5) T admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in \mathcal{L}(H, H)$ tel que $V \circ T = I_H$).

Remarque et contre-exemple : Attention si $\dim H = +\infty$, les propriétés équivalentes du théorème précédent ne sont plus vraies :
Soit $H = \ell^2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme $||x||_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^2\right)^{1/2}$ $(x = (x_n)_{n\geq 1})$. Considérons l'application $S : \ell^2 \to \ell^2$ définie pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1}$, par $Sx = y = (y_n)_{n\geq 1}$ où

$$y_1 = 0\ y_2 = x_1, \ldots, y_n = x_{n+1}, \ldots (n \geq 1). \tag{4}$$

Autrement dit Sx est la suite qui commence par 0 et qui ensuite est composée des mêmes termes que la suite x mais décalés d'un rang. L'application S est linéaire de ℓ^2 dans lui même et c'est une isométrie puisque $||Sx||_2 = ||x||_2$.

[2]voir les cours de L1 et L2.

Donc $S \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$. On appelle S l'opérateur de décalage[3] dans ℓ^2. On voit alors facilement que :
1) S est injective (car isométrique),
2) S n'est pas surjective.
3) S admet un inverse à gauche $T : x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto Tx = (x_{n+1})_{n\geq 1}$ (c'est l'opérateur qui «efface» la première coordonnée donc on a clairement $T \circ S = I_{\ell^2}$).
4) L'opérateur T n'est pas inverse à droite de l'opérateur S.

Le seul résultat simple valable quelle que soit la dimension de H est le suivant :

Théorème 1.7 *: Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est tel que $|||T||| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(H, H)$, l'opérateur $I - T$ est inversible et*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n. \tag{5}$$

Remarque 1 : Le résultat précédent est vrai aussi si H est remplacé par un espace de Banach quelconque.

Remarque 2 : Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème sous la forme suivante : Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est tel que $|||I - T||| < 1$, alors T est inversible et on a $T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - T)^n$.

1.4 Adjoint d'un opérateur

Soient H et H' des espaces de Hilbert. On va généraliser la notion d'adjoint d'une application linéaire de $\mathbb{C}^d$ dans lui même, qu'on étudie généralement en L2.

Théorème 1.8 *: Soit $T \in \mathcal{L}(H, H')$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H', H)$ tel que*

$$\forall x \in H,\ \forall y \in H',\ < Tx, y >_{H'} = < x, T^* y >_H . \tag{6}$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

Définition 1.9 *: Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est tel que $T = T^*$, on dit que l'opérateur T est autoadjoint (ou hermitien).*

Théorème 1.10 *(Propriétés de l'adjoint) :*
1) Pour tout $A \in \mathcal{L}(H, H')$, on a

$$(A^*)^* = A \quad \text{et} \quad |||A^*||| = |||A|||. \tag{7}$$

2) Si $A \in \mathcal{L}(H, H')$ et $B \in \mathcal{L}(H', H)$, alors

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*. \tag{8}$$

4) Pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H, H')$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^*. \tag{9}$$

[3] ou «shift» en anglais.

1.4.1 Exemples d'opérateurs adjoint

Exemple 1 : Soit $H = L^2([a,b])$ $(a < b)$ l'espace des classes de fonctions $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ de carré sommable avec le produit scalaire $< x, y >= \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue fixée. L'application T qui à la fonction $x \in H$ fait correspondre la fonction Tx définie sur $[a,b]$ par

$$(Tx)(t) = f(t)x(t)$$

est un opérateur $T \in \mathcal{L}(H,H)$ appelé opérateur de multiplication par f. L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H,H)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction $\bar{f}$.

Exemple 2 : Soit $k : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ $(c < d,\ a < b)$ une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'application $K : L^2([a,b]) \to L^2([c,d])$ telle que pour tout $x \in L^2([a,b])$, Kx est la fonction définie par

$$\forall t \in [c,d], \quad (Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds. \tag{10}$$

K est un opérateur de $L^2([a,b])$ dans $L^2([c,d])$ qu'on appelle opérateur intégral de noyau $k(t,s)$. On abrège souvent en disant que K est un opérateur à noyau (égal à k).
L'opérateur adjoint K^* est aussi un opérateur à noyau. C'est l'opérateur intégral de $L^2([c,d])$ dans $L^2([a,b])$ dont le noyau est la fonction $(s,t) \mapsto \overline{k(s,t)}$ de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{C}$ (attention les intervalles sont maintenant dans l'ordre inverse !) i.e. pour tout $y \in L^2([c,d])$, $K^*y \in L^2([a,b])$ est la fonction définie par

$$\forall s \in [a,b], \quad (K^*y)(s) = \int_c^d \overline{k(s,t)}y(t)dt. \tag{11}$$

Dans le cas particulier où $[a,b] = [c,d]$, l'opérateur $K : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ est autoadjoint si le noyau k satisfait la condition de symétrie hermitienne

$$\forall (s,t) \in [a,b]^2,\ k(s,t) = \overline{k(t,s)}. \tag{12}$$

1.4.2 Vecteurs propres et valeurs propres d'un opérateur autoadjoint

Les opérateurs autoadjoints ont des propriétés particulièrement importantes que nous allons maintenant examiner. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H,H)$ un opérateur.

Théorème 1.11 *(Norme d'un opérateur autoadjoint) : Si T est autoadjoint (i.e. $T = T^*$), alors*

$$|||T||| = \sup_{||x||=1} | < Tx, x > | \tag{13}$$

Définition 1.12 *(Rappel) : On dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T s'il existe un vecteur $x \in H$, $x \neq 0$, tel que $Tx = \lambda x$. Un tel vecteur x est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Remarque : Soit λ une valeur propre de T. Alors l'ensemble V_λ de tous[4] les vecteurs $x \in H$ tels que $Tx = \lambda x$ est un sous-espace **fermé** (exercice) de H. On l'appelle le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Théorème 1.13 *Si T est autoadjoint, les valeurs propres de T sont réelles et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux*[5].

Dans le cas de la dimension finie, on déduit le résultat bien connu suivant

Corollaire 1.14 *: Si $\dim H < +\infty$ et si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est autoadjoint, alors T est diagonalisable*

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant que nous signalons car il est très utile en général :

Lemme 1.15 *: Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ un opérateur et soit V un sous-espace vectoriel fermé de H invariant par T (i.e. $\forall x \in V,\ Tx \in V$). Alors le sous-espace $V^\perp$ est invariant par l'adjoint T^*.*

1.4.3 Matrice d'un opérateur dans une base hilbertienne

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H. Soit T un opérateur de H dans lui même. Pour tout $j \geq 1$, on peut écrire

$$Te_j = \sum_{i=1}^{+\infty} < Te_j, e_i > e_i. \tag{14}$$

Nous allons voir que les coefficients $a_{ij} :=< Te_j, e_i >$ ($(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$) déterminent entièrement l'opérateur T :
Pour tout $x \in H$, posons $x_j =< x, e_j >$. on a alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j e_j$ et

$$Tx = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j Te_j, \tag{15}$$

car l'opérateur T est continu. D'autre part, la décomposition de Tx sur la base hilbertienne (e_n) donne

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} < Tx, e_i > e_i. \tag{16}$$

Mais d'après (15) et grâce à la continuité du produit scalaire, on a

$$< Tx, e_i >= \sum_{j=1}^{+\infty} x_j < Te_j, e_i >= \sum_{j=1}^{+\infty} x_j a_{ij}. \tag{17}$$

D'après (16), on a donc

$$Tx = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j \right) e_i. \tag{18}$$

[4]incluant le vecteur 0 (qui n'est pas un vecteur propre par définition).

[5]Autrement dit les sous-espaces propres V_{λ_1} et V_{λ_2} correspondant à des valeurs propres $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sont orthogonaux.

La formule (17) montre alors que le i-ième coefficient (de Fourier) de Tx sur la base hilbertienne (e_n), s'obtient comme en dimension finie en faisant le «produit» de la i-ième ligne de la matrice (a_{ij}) par la colonne des coefficients de Fourier de x.

Définition 1.16 *: La matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ à une infinité de lignes et de colonnes, est appelée matrice de l'opérateur T dans la base hilbertienne (e_n).*

On notera que puisque $a_{ij} :=< Te_j, e_i >$, la j-ième colonne de la matrice A est constituée des coefficients du vecteur Te_j comme en dimension finie.

Remarque : Nous ne développerons pas le calcul matriciel en dimension infinie car il présente certaines difficultés techniques liées essentiellement à des problèmes de convergence de séries.

Exercice : Si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est la matrice d'un opérateur T dans une base hilbertienne de H, quelle est la matrice de l'opérateur adjoint T^* ?