

Chapitre 4: Formes linéaires et dualité dans un espace de Hilbert

*

1 Dual d'un espace vectoriel normé (Rappel)

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Définition 1.1 : On appelle dual topologique de V , l'espace¹ $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ des formes² linéaires continues de V dans \mathbb{K} .

Remarque : Attention à ne pas confondre V^* avec le dual algébrique de V qui est l'espace de toutes les formes linéaires, continues ou non. Si V est de dimension finie le dual algébrique et le dual topologique coïncident. En dimension infinie, seul le dual topologique est intéressant. Nous l'appellerons simplement dual.

Théorème 1.2 : L'espace dual V^* muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$(1) \quad \forall \phi \in V^*, \quad \|\phi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\phi(x)|,$$

est un espace de Banach.

Remarque : On notera qu'on n'a pas supposé que V est complet. L'espace V^* est donc en général plus régulier que V .

2 Dual d'un espace de Hilbert

On suppose ici que H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$. La norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est toujours la norme euclidienne. Pour tout $y \in H$, l'application $f_y : H \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$(2) \quad \forall x \in H, \quad f_y(x) = \langle x, y \rangle,$$

est une forme linéaire i.e. $f_y \in H^*$. Inversement, on a le résultat fondamental suivant qui identifie H^* à H :

*Notes du cours sur les espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Licence 3-ième année, Université de Tours. Les démonstrations sont données dans le cours oral.

1. C'est un espace vectoriel pour les opérations usuelles somme de deux formes linéaires et multiplication par un scalaire : $\forall \phi, \psi \in V^*, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \phi + \psi : x \mapsto (\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x), \lambda \phi : x \mapsto (\lambda \phi)(x) := \lambda \cdot \phi(x)$.

2. on dit aussi fonctionnelles linéaires.

Théorème 2.1 (Riesz-Fréchet) : Pour tout $f \in H^*$, il existe un **unique** $y \in H$ tel que

$$(3) \quad \forall x \in H, f(x) = \langle x, y \rangle .$$

De plus $\|f\| = \|y\|$.

Pour la preuve, on utilise le lemme

Lemme 2.2 : Pour tout $f \in H^*$, $\text{Ker } f = \{x \in H; f(x) = 0\}$ est un hyperplan fermé de H i.e. un sous espace fermé tel que $\dim(\text{Ker } f)^\perp = 1$.

Remarque : L'application $y \mapsto f_y$ de H sur H^* qui identifie H et H^* est une bijection isométrique et semi-linéaire³ car pour tous $y, y' \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on $f_{y+y'} = f_y + f_{y'}$ et $f_{\lambda y} = \bar{\lambda} f_y$.

2.1 Application 1 : Complétion d'un espace préhilbertien

Soit E un espace préhilbertien, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne associée. Soit E^* le dual de E muni de sa norme naturelle $\|\cdot\|$ (voir le paragraphe 1). On notera ici $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{E^*}$. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire ϕ_x donnée par

$$(4) \quad \phi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle ,$$

est un élément de E^* et on sait que

$$(5) \quad \|\phi_x\|_{E^*} = \|x\| .$$

Considérons alors l'application $\phi : x \mapsto \phi_x$ de E dans E^* . D'après (5), l'application ϕ est une isométrie donc elle est injective. Ainsi ϕ est une bijection semi-linéaire et isométrique de E sur $\phi(E) \subset E^*$. On identifiera donc l'espace E à son image $\phi(E)$.

Posons $H = \overline{\phi(E)}$ (adhérence de $\phi(E)$ dans E^*) et soit $\|\cdot\|_H$ la norme induite⁴ par la norme de E^* sur H . On a alors :

Proposition 2.3 : $(H, \|\cdot\|_H)$ est un espace de Hilbert contenant E comme sous-espace vectoriel dense. On l'appelle le complété de l'espace préhilbertien E .

Remarque : Le complété d'un espace préhilbertien est unique à isomorphisme près, c'est le résultat de l'exercice qui suit :

Exercice : Soit E un espace préhilbertien et $(H_1, \|\cdot\|_{H_1})$ et $(H_2, \|\cdot\|_{H_2})$ des espaces de Hilbert contenant E comme sous-espace vectoriel dense. Montrer que H_1 et H_2 sont isomorphes⁵ (indication : quand une suite (x_n) de points de E converge dans H_1 vers un point $a \in H_1$, on montrera qu'elle converge aussi dans H_2 vers un point $\varphi(a)$).

Exemple et exercice : L'espace $L^2([-1, 1])$ est le complété de l'espace préhilbertien $C([-1, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}dt$.

3. linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

4. i.e. $\forall h \in H, \|h\|_H = \|h\|_{E^*}$.

5. voir le chapitre 2 pour la notion d'isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Exemple : L'espace $L^2(\mathbb{R})$ des classes de fonctions de carré intégrable avec le produit scalaire

$$(6) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

est un espace de Hilbert (voir le cours d'intégration). Tout élément Φ du dual de $L^2(\mathbb{R})$ est de la forme

$$(7) \quad \Phi : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

pour une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ associée de manière unique à Φ .

2.2 Application 2 : Adjoint d'un opérateur

Soient H et H' des espaces de Hilbert. On va généraliser la notion d'adjoint d'une application linéaire de \mathbb{C}^d dans lui-même, qu'on étudie généralement en L2.

Théorème 2.4 : Soit $T \in \mathcal{L}(H, H')$. Alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H', H)$ tel que

$$(8) \quad \forall x \in H, \forall y \in H', \quad \langle Tx, y \rangle_{H'} = \langle x, T^*y \rangle_H.$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T .

Définition 2.5 : Si $T \in \mathcal{L}(H, H)$ est tel que $T = T^*$, on dit que l'opérateur T est autoadjoint (ou hermitien).

Théorème 2.6 (Propriétés de l'adjoint) :

1) Pour tout $A \in \mathcal{L}(H, H')$, on a

$$(9) \quad (A^*)^* = A \quad \text{et} \quad \| \|A^*\| \| = \| \|A\| \|.$$

2) Si $A \in \mathcal{L}(H, H')$ et $B \in \mathcal{L}(H', H)$, alors

$$(10) \quad (B \circ A)^* = A^* \circ B^*.$$

4) Pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H, H')$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$(11) \quad (\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^*.$$

Exemple : Soit $H = L^2([a, b])$ ($a < b$) l'espace des classes de fonctions $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de carré sommable avec le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue fixée. L'application T qui à la fonction $x \in H$ fait correspondre la fonction Tx définie sur $[a, b]$ par

$$(Tx)(t) = f(t)x(t)$$

est un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H)$ appelé opérateur de multiplication par f . L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction \bar{f} .