

# Chapitre 3: Les séries de Fourier

\*

26 février 2008

## 1 La base hilbertienne trigonométrique

### 1.1 L'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$

Soit  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$  l'espace des fonctions  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mesurables au sens de Lebesgue et telles que

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

C'est un espace préhilbertien avec le produit scalaire

$$(2) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

On montre dans le cours d'intégration que l'espace vectoriel quotient

$$(3) \quad L^2([-\pi, \pi]) = \frac{\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])}{N} \quad \text{où} \quad N = \{f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]); f = 0 \text{ p.p.}\},$$

est complet pour la norme

$$(4) \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Autrement dit  $L^2([-\pi, \pi])$  est un espace de Hilbert.

En toute rigueur les éléments de  $L^2([-\pi, \pi])$  sont des classes d'équivalence de fonctions mais on peut les considérer comme des fonctions usuelles (i.e. comme des éléments de  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi])$ ) à condition de considérer comme égales des fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $f = g$  p.p. Nous ferons cette convention dans la suite.

**Proposition 1.1** : Les fonctions  $e_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  définies par

$$(5) \quad e_n(t) = e^{int}, \quad (t \in [-\pi, \pi]),$$

constituent un système orthonormal dans  $L^2([-\pi, \pi])$ . On l'appelle le système trigonométrique.

---

\*Notes du cours sur les espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Licence 3-ième année, Université de Tours, année 2006-2007. Les démonstrations sont données dans le cours oral.

## 1.2 La base hilbertienne trigonométrique

**Théorème 1.2** : *Le système trigonométrique  $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$  est une base hilbertienne de  $L^2([-\pi, \pi])$ .*

Les étapes pour arriver à ce résultat fondamental sont les suivantes. On commence par montrer le lemme :

**Lemme 1.3** : *Si  $f$  est une fonction continue sur  $[-\pi, \pi]$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\langle f, e_n \rangle = 0$ , alors  $f \equiv 0$ .*

La méthode que nous utilisons est assez directe<sup>1</sup>. Décrivons la succinctement. Il est important de prolonger  $f$  en une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Par l'absurde si  $f$  n'était pas identiquement nulle, elle serait strictement supérieure à une constante positive sur un intervalle qu'on peut toujours supposer (moyennant éventuellement de modifier  $f$  par une translation et un changement de signe) être l'intervalle  $] -h, h[$ . Comme  $f$  doit être orthogonale à tout polynôme trigonométrique et en particulier à

$$P_n(x) = (1 + \cos x - \cos h)^n,$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = +\infty$  pour  $x \in ] -h, h[$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = 0$  pour  $x \in ] -\pi, -h[ \cup ] h, \pi[$ , on arrive facilement à une contradiction mais il faut utiliser le théorème de convergence dominée pour justifier que

$$\left( \int_{-\pi}^{-h} + \int_h^{\pi} \right) f(x) P_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

et le lemme de Fatou pour voir que

$$\int_{-h}^h f(x) P_n(x) dx \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Une conséquence immédiate est que deux fonctions continues sur  $[-\pi, \pi]$  qui ont même coefficients de Fourier, sont égales.

La deuxième étape consiste à utiliser la densité de l'espace  $C([-\pi, \pi])$  dans  $L^2([-\pi, \pi])$ . C'est un résultat qu'on démontre en intégration mais qui n'est pas élémentaire. On peut faire autrement<sup>2</sup> :

Supposons que  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  soit telle que  $\langle f, e_n \rangle = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . La fonction

$$(6) \quad \Phi(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt \quad (x \in [-\pi, \pi]),$$

est continue et on voit facilement en permutant les intégrations que pour tout  $n \neq 0$ , on a  $\langle \Phi, e_n \rangle = 0$  donc  $\Phi$  est constante sur  $[-\pi, \pi]$ . Il en résulte que pour tous  $x < y$  dans  $[-\pi, \pi]$ , on a

$$(7) \quad \int_x^y f(t) dt = 0.$$

Mais un résultat bien connu d'intégration implique aussitôt que  $f = 0$  p.p. C'est ce qu'il fallait démontrer.

<sup>1</sup>mais peu utilisée dans les livres, donc nous donnons des détails.

<sup>2</sup>Cette méthode due à W.Feller n'étant pas classique, mais pourtant très simple, nous donnons les détails.

**Corollaire 1.4** : La famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $f_0 \equiv 1$  et  $f_{2k}(t) = \sqrt{2} \cos kt$  et  $f_{2k-1}(t) = \sqrt{2} \sin kt$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) est aussi une base hilbertienne de  $L^2([-\pi, \pi])$ .

D'après le théorème 3.14 du chapitre 2, on a donc le corollaire suivant

**Corollaire 1.5** : Toute fonction  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  est somme (au sens de  $L^2$ ) de sa série de Fourier<sup>3</sup>.

**Remarque** : Le résultat précédent signifie que la suite des sommes partielles

$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k$  de la série de Fourier convergent vers  $f$  quand  $n \rightarrow \infty$ , i.e.

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k \right\|_2 = 0.$$

Attention ceci n'implique pas que la suite de fonctions  $(S_n(f))$  converge vers  $f$  au sens usuel (de la convergence simple). Ceci peut arriver dans certains cas que nous examinons dans le paragraphe suivant.

**Remarque** : Maintenant qu'on sait que la famille des fonctions  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $L^2([-\pi, \pi])$  tous les résultats démontrés au chapitre 2, en particulier au paragraphe 3.4 s'appliquent aux séries de Fourier classiques : égalité de Bessel-Parseval etc... Nous sommes sûr que le lecteur est capable d'appliquer ces résultats sans qu'il soit nécessaire de les recopier ici.

## 2 Quelques résultats sur la convergence simple ou uniforme des séries de Fourier

### 2.1 Rappels de L2 sur les séries trigonométriques

**Définition 2.1** : On appelle série trigonométrique toute série de la forme

$$(9) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt],$$

où les suites  $c_n$  (resp.  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ) sont appelées les coefficients de la série trigonométrique.

**Exemple** : La série de Fourier d'une fonction  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  est une série trigonométrique de la forme

$$(10) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

mais c'est aussi une série  $\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$  avec

$$(11) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

pour tout  $n \geq 1$ .

<sup>3</sup>sous la forme exponentielles complexe ou sous la forme sinus-cosinus

**Proposition 2.2** : Si  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$  (resp.  $\sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$ ) la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$  (resp.  $\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$ ) est normalement donc uniformément convergente et sa somme est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.3** (règle d'Abel) : Soient  $(v_n)$  et  $(\varepsilon_n)$  deux suites de nombres complexes telles que :

- 1) il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $n < m \in \mathbb{N}$  :  $|v_n + v_{n+1} + \dots + v_m| \leq C$ .
- 2) la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$  est convergente.
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ .

Alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n v_n$  est convergente.

**Exemple** : Si  $(\varepsilon_n)$  est une suite décroissante de nombres positifs et qui tend vers zéro, alors pour tout  $t \neq 2k\pi$ , les séries

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{int}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos nt \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sin nt$$

sont convergentes. De plus, en utilisant le critère de Cauchy de convergence uniforme, on montre que :

**Proposition 2.4** : Si  $(\varepsilon_n)$  est une suite décroissante de nombres positifs et qui tend vers zéro, alors les séries trigonométriques (12) sont uniformément convergentes sur tout intervalle de la forme  $0 < \alpha \leq t \leq 2\pi - \alpha < 2\pi$ .

## 2.2 Deux cas très simples de convergence d'une série de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$  périodique.

**Théorème 2.5** (cas d'une fonction de classe  $C^2$ ) : Si  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , sa série de Fourier est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$  et sa somme est égale à  $f$ .

**Théorème 2.6** : Si  $f$  est intégrable sur  $[-\pi, \pi]$  et dérivable en un point  $x_0$ , alors  $f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e^{inx_0}$ . Autrement dit, en tout point où elle est dérivable,  $f$  est somme de sa série de Fourier.

Il existe une preuve très élégante mais peu connue de ce résultat. Nous l'indiquons brièvement : Par translation de la variable et addition éventuelle d'une constante, on peut se ramener au cas où  $f$  est dérivable en  $x = 0$  et  $f(0) = 0$ . Considérons alors la fonction  $g$  définie par

$$g(t) = \frac{f(t)}{e^{it} - 1}.$$

Cette fonction est intégrable<sup>4</sup> sur  $[-\pi, \pi]$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\langle f, e_k \rangle = \langle g, e_{k-1} \rangle - \langle g, e_k \rangle.$$

<sup>4</sup>noter qu'elle est prolongeable par continuité en  $t = 0$ .

D'où  $\sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle = \langle g, e_{-n-1} \rangle - \langle g, e_n \rangle \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$  par le lemme de Riemann-Lebesgue (énoncé ci-dessous). D'où  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e^{ikx} = 0 = f(0)$ , Q.E.D.

**Lemme 2.7** (de Riemann-Lebesgue) : Si  $f$  est intégrable sur l'intervalle compact  $[a, b]$ , on a

$$(13) \quad \lim_{|n| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{-int} dt = 0.$$

## 2.3 Le théorème de Dirichlet-Jordan

On considère ici une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$  périodique et bornée. Le résultat qui suit s'applique à la plupart des fonctions usuelles. Il est admis.

**Théorème 2.8** : Si  $f$  est bornée et monotone par morceaux sur  $[-\pi, \pi]$ , alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement en tout point  $x \in \mathbb{R}$  et on a

$$(14) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e^{inx} = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)),$$

où  $f(x+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ x < t}} f(t)$  et  $f(x-0) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t)$ . En particulier en un point  $x$  où  $f$  est continue, on a  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e^{inx} = f(x)$ .

**Remarque** : Ce résultat de Jordan généralise un théorème de Dirichlet vu en L2 où on suppose que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux<sup>5</sup>. Il est beaucoup plus difficile à démontrer ; c'est la raison pour laquelle il est admis<sup>6</sup>.

## 3 Le théorème de Fejer

Il existe des fonctions continues  $2\pi$  périodiques qui ne sont pas somme de leur série de Fourier. Pour remédier à cet inconvénient, Fejer a eu l'idée ingénieuse de considérer les moyennes des  $n$  premières sommes partielles de la série de Fourier pour forcer la convergence vers  $f$ . Ce résultat a de nombreuses applications.

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.1** : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $n$ -ième somme de Fejer, la fonction  $\sigma_n(f)$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$(15) \quad \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x),$$

où  $S_k(f)(x) = \sum_{j=-k}^k \langle f, e_j \rangle e^{ijx}$  est la  $k$ -ième somme de Fourier de  $f$ .

<sup>5</sup>Voir le livre de A. Gramain : intégration, Hermann éditeur (p.60).

<sup>6</sup>pour une démonstration voir le livre de Valiron : théorie des fonctions, Masson éditeur.

**Proposition 3.2** (expression intégrale de  $\sigma_n(f)$ ) : On a la formule

$$(16) \quad \sigma_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt,$$

où  $\Phi_n$  est une fonction appelée noyau de Fejer d'ordre  $n$ , donnée par

$$(17) \quad \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left( \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

- 1)  $\Phi_n$  est une fonction positive,  $2\pi$ -périodique et paire.
- 2)  $\forall n \geq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1$ .
- 3)  $\forall \xi > 0, \alpha_n(\xi) = \int_{-\xi}^{\xi} \Phi_n(t)dt = \int_{\xi}^{\pi} \Phi_n(t)dt \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 3.3** (Fejer) : Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors la suite de fonctions  $(\sigma_n(f))$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$  quand  $n \rightarrow +\infty$  i.e.

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \right) = 0.$$

### 3.1 Applications du théorème de Fejer

Une application immédiate du théorème de Fejer est le résultat suivant

**Théorème 3.4** : Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ . Si la série de Fourier  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e^{inx}$  de  $f$  est convergente en un point  $x \in \mathbb{R}$ , alors sa somme est égale à  $f(x)$ .

La démonstration utilise le lemme suivant (exercice de L1) :

**Lemme 3.5** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$  existe. Alors on a aussi

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n} = \ell.$$

On peut déduire le théorème de Weierstrass du théorème de Fejer :

**Théorème 3.6** (de Weierstrass) : Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle compact  $[a, b]$  est limite uniforme sur  $[a, b]$  d'une suite de polynômes.

Le théorème de Fejer permet aussi de donner une autre démonstration du résultat suivant qui implique la totalité du système trigonométrique :

**Théorème 3.7** : Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace  $C([-\pi, \pi])$  des fonctions continues sur  $[-\pi, \pi]$  pour la norme de  $L^2([-\pi, \pi])$ .

Il faut procéder soigneusement pour démontrer ce résultat. On commence par considérer une fonction  $f \in C([-\pi, \pi])$  telle que  $f(\pi) = f(-\pi)$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une somme de Fejer  $\sigma_N(f)$  de  $f$  telle que  $\|\sigma_N(f) - f\|_2 \leq \varepsilon$ . Pour une fonction  $f \in C([-\pi, \pi])$  quelconque, on commence par construire une fonction  $f_\varepsilon \in C([-\pi, \pi])$  telle que  $f_\varepsilon(\pi) = f_\varepsilon(-\pi)$  et  $\|f_\varepsilon - f\|_2 \leq \varepsilon/2$ , puis on prend une somme de Fejer  $\sigma_N(f_\varepsilon)$  telle que  $\|f_\varepsilon - \sigma_N(f_\varepsilon)\|_2 \leq \varepsilon/2$ . Alors  $\|f - \sigma_N(f_\varepsilon)\|_2 \leq \varepsilon$ ; c'est le résultat cherché.