Chapitre 3: Les séries de Fourier

*

1 La base hilbertienne trigonométrique

1.1 L'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$

Soit $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ l'espace des fonctions $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ mesurables au sens de Lebesgue et telles que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty. \tag{1}$$

C'est un espace préhilbertien avec le produit scalaire

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{2}$$

On montre dans le cours d'intégration que l'espace vectoriel quotient

$$L^2([-\pi,\pi]) = \frac{\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])}{N} \quad \text{où} \quad N = \left\{f \in \mathcal{L}^2([-\pi,\pi]);\ f = 0\ p.p.\right\}, \tag{3}$$

est complet pour la norme

$$||f||_2 = \sqrt{< f, f >} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Autrement dit $L^2([-\pi,\pi])$ est un espace de Hilbert.
En toute rigueur les éléments de $L^2([-\pi,\pi])$ sont des classes d'équivalence de fonctions mais on peut les considérer comme des fonctions usuelles (i.e. comme des éléments de $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$) à condition de considérer comme égales des fonctions f et g telles que $f = g$ p.p. Nous ferons cette convention dans la suite.

Proposition 1.1 *: Les fonctions e_n, $n \in \mathbb{Z}$ définies par*

$$e_n(t) = e^{int}, \quad (t \in [-\pi,\pi]), \tag{5}$$

constituent un système orthonormal dans $L^2([-\pi,\pi])$. On l'appelle le système trigonométrique.

---

*Notes du cours sur les espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Licence 3-ième année, Université de Tours. Les démonstrations sont données dans le cours oral.

1.2 La base hilbertienne trigonométrique

Théorème 1.2 *: Le système trigonométrique $\{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$.*

Les étapes pour arriver à ce résultat fondamental sont les suivantes. On commence par montrer le lemme :

Lemme 1.3 *: Si f est une fonction continue sur $[-\pi,\pi]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $< f, e_n >= 0$, alors $f \equiv 0$.*

La méthode que nous utilisons est assez directe [1]. Décrivons la succintement. Il est important de prolonger f en une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Par l'absurde si f n'était pas identiquement nulle, elle serait strictement supérieure à une constante positive sur un intervalle qu'on peut toujours supposer (moyennant éventuellement de modifier f par une translation et un changement de signe) être l'intervalle $]-h,h[$. Comme f doit être orthogonale à tout polynôme trigonométrique et en particulier à

$$P_n(x) = (1 + \cos x - \cos h)^n,$$

et comme $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = +\infty$ pour $x \in]-h,h[$ et $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$ pour $x \in]-\pi,-h[\cup]h,\pi[$, on arrive facilement à une contradiction mais il faut utiliser le théorème de convergence dominée pour justifier que

$$\left(\int_{-\pi}^{-h} + \int_{h}^{\pi}\right) f(x)P_n(x)dx \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

et le lemme de Fatou pour voir que

$$\int_{-h}^{h} f(x)P_n(x)dx \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

Une conséquence immédiate est que deux fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$ qui ont même coefficients de Fourier, sont égales.
La deuxième étape consiste à utiliser la densité de l'espace $C([-\pi,\pi])$ dans $L^2([-\pi,\pi])$. C'est un résultat qu'on démontre en intégration mais qui n'est pas élémentaire. On peut faire autrement [2] :
Supposons que $f \in L^2([-\pi,\pi])$ soit telle que $< f, e_n >= 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La fonction

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt \quad (x \in [-\pi,\pi]), \tag{6}$$

est continue et on voit facilement en permutant les intégrations que pour tout $n \neq 0$, on a $< \Phi, e_n >= 0$ donc Φ est constante sur $[-\pi,\pi]$. Il en résulte que pour tous $x < y$ dans $[-\pi,\pi]$, on a

$$\int_{x}^{y} f(t)dt = 0. \tag{7}$$

Mais un résultat bien connu d'intégration implique aussitôt que $f = 0$ p.p. C'est ce qu'il fallait démontrer.

1. mais peu utilisée dans les livres, donc nous donnons des détails.
2. Cette méthode due à W.Feller n'étant pas classique, mais pourtant très simple, nous donnons les détails.

Corollaire 1.4 *: La famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $f_0 \equiv 1$ *et* $f_{2k}(t) = \sqrt{2}\cos kt$ *et* $f_{2k-1}(t) = \sqrt{2}\sin kt$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ *est aussi une base hilbertienne de* $L^2([-\pi,\pi])$.

D'après le théorème 3.14 du chapitre 2, on a donc le corollaire suivant

Corollaire 1.5 *: Toute fonction* $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *est somme (au sens de* L^2*) de sa série de Fourier*[3].

Remarque : Le résultat précédent signifie que la suite des sommes partielles $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} < f, e_k > e_k$ de la série de Fourier convergent vers f quand $n \to \infty$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} < f, e_k > e_k \right\|_2 = 0. \tag{8}$$

Attention ceci n'implique pas que la suite de fonctions $(S_n(f))$ converge vers f au sens usuel (de la convergence simple). Ceci peut arriver dans certains cas que nous examinons dans le paragraphe suivant.

Remarque : Maintenant qu'on sait que la famille des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$ tous les résultats démontrés au chapitre 2, en particulier au paragraphe 3.4 s'appliquent aux séries de Fourier classiques : égalité de Bessel-Parseval etc.... Nous sommes sûr que le lecteur est capable d'appliquer ces résultats sans qu'il soit nécessaire de les recopier ici.

2 Quelques résultats sur la convergence simple ou uniforme des séries de Fourier

2.1 Rappels de L2 sur les séries trigonométriques

Définition 2.1 *: On appelle série trigonométrique toute série de la forme*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad ou \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt], \tag{9}$$

où les suites c_n *(resp.* (a_n) *et* (b_n)*) sont appelées les coefficients de la série trigonométrique.*

Exemple : La série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([-\pi,\pi]$ est une série trigonométrique de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{10}$$

mais c'est aussi une série $\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$ avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\ dt \tag{11}$$

pour tout $n \geq 1$.

3. sous la forme exponentielles complexe ou sous la forme sinus-cosinus

Proposition 2.2 *: Si* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ *(resp.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|) < +\infty$ *) la série* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ *(resp.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos nt + b_n \sin nt]$*) est normalement donc uniformément convergente et sa somme est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 2.3 *(règle d'Abel) : Soient* (v_n) *et* (ε_n) *deux suites de nombres complexes telles que :*
1) il existe $C > 0$ *tel que pour tous* $n < m \in \mathbb{N}$ *:* $|v_n + v_{n+1} + \cdots + v_m| \leq C$*.*
2) la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ *est convergente.*
3) $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$*.*
Alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n v_n$ *est convergente.*

Exemple : Si (ε_n) est une suite décroissante de nombres positifs et qui tend vers zéro, alors pour tout $t \neq 2k\pi$, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{int}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos nt \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sin nt \tag{12}$$

sont convergentes. De plus, en utilisant le critère de Cauchy de convergence uniforme, on montre que :

Proposition 2.4 *: Si* (ε_n) *est une suite décroissante de nombres positifs et qui tend vers zéro, alors les séries trigonométriques (12) sont uniformément convergentes sur tout intervalle de la forme* $0 < \alpha \leq t \leq 2\pi - \alpha < 2\pi$*.*

2.2 Deux cas très simples de convergence d'une série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique.

Théorème 2.5 *(cas d'une fonction de classe* C^2*) : Si* f *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$*, sa série de Fourier est uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *et sa somme est égale à* f*.*

Théorème 2.6 *: Si* f *est intégrable sur* $[-\pi, \pi]$ *et dérivable en un point* x_0*, alors* $f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} < f, e_n > e^{inx_0}$*. Autrement dit, en tout point où elle est dérivable,* f *est somme de sa série de Fourier.*

Il existe une preuve très élégante mais peu connue de ce résultat. Nous l'indiquons brièvement : Par translation de la variable et addition éventuelle d'une constante, on peut se ramener au cas ou f est dérivable en $x = 0$ et $f(0) = 0$. Considérons alors la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{f(t)}{e^{it} - 1}.$$

Cette fonction est intégrable[4] sur $[-\pi, \pi]$ et pour tout $k \in Z$, on a

$$< f, e_k >=< g, e_{k-1} > - < g, e_k > .$$

4. noter qu'elle est prolongeable par continuité en $t = 0$.

D'où $\sum_{k=-n}^{n} < f, e_k > = < g, e_{-n-1} > - < g, e_n > \to 0$ si $n \to \infty$ par le lemme de Riemann-Lebesgue (énoncé ci-dessous). D'où $\sum_{k\in\mathbb{Z}} < f, e_k > e^{i0} = 0 = f(0)$, Q.E.D.

Lemme 2.7 *(de Riemann-Lebesgue) : Si f est intégrable sur l'intervalle compact $[a, b]$, on a*

$$\lim_{|n|\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{-int}dt = 0. \tag{13}$$

3 Le théorème de Fejer

Il existe des fonctions continues 2π périodiques qui ne sont pas somme de leur série de Fourier. Pour remédier à cet inconvénient, Fejer a eu l'idée ingénieuse de considérer les moyennes des n premières sommes partielles de la série de Fourier pour forcer la convergence vers f. Ce résultat a de nombreuses applications.

Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.1 *: Soit $\in \mathbb{N}^*$. On appelle n-ième somme de Fejer, la fonction $\sigma_n(f)$ définie pour $x \in \mathbb{R}$, par*

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x), \tag{14}$$

où $S_k(f)(x) = \sum_{j=-k}^{k} < f, e_j > e^{ijx}$ est la k-ième somme de Fourier de f.

Proposition 3.2 *(expression intégrale de $\sigma_n(f)$) : On a la formule*

$$\sigma_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt, \tag{15}$$

où Φ_n est une fonction appelée noyau de Fejer d'ordre n, donnée par

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{16}$$

et vérifiant les propriétés suivantes :
1) Φ_n est une fonction positive, 2π-périodique et paire.
2) $\forall n \geq 1$, $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1$.
3) $\forall \xi > 0$, $\alpha_n(\xi) = \int_{-\pi}^{-\xi} \Phi_n(t)dt = \int_{\xi}^{\pi} \Phi_n(t)dt \to 0$ si $n \to +\infty$.

Théorème 3.3 *(Fejer) : Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la suite de fonctions $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$ i.e.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sigma_n(f)(x) - f(x)|\right) = 0. \tag{17}$$

3.1 Applications du théorème de Fejer

Une application immédiate du théorème de Fejer est le résultat suivant

Théorème 3.4 *: Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Si la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} < f, e_n > e^{inx}$ de f est convergente en un point $x \in \mathbb{R}$, alors sa somme est égale à $f(x)$.*

La démonstration utilise le lemme suivant (exercice de L1) :

Lemme 3.5 *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$ existe. Alors on a aussi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n} = \ell. \tag{18}$$

On peut déduire le théorème de Weierstrass du théorème de Fejer :

Théorème 3.6 *(de Weierstrass) : Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.*

Le théorème de Fejer permet aussi de donner une autre démonstration du résultat suivant qui implique la totalité du système trigonométrique :

Théorème 3.7 *: Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace $C([-\pi, \pi])$ des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$ pour la norme de $L^2([-\pi, \pi])$.*

Il faut procéder soigneusement pour démontrer ce résultat. On commence par considérer une fonction $f \in C([-\pi, \pi])$ telle que $f(\pi) = f(-\pi)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une somme de Fejer $\sigma_N(f)$ de f telle que $||\sigma_N(f) - f||_2 \leq \varepsilon$. Pour une fonction $f \in C([-\pi, \pi])$ quelconque, on commence par construire une fonction $f_\varepsilon \in C([-\pi, \pi])$ telle que $f_\varepsilon(\pi) = f_\varepsilon(-\pi)$ et $||f_\varepsilon - f||_2 \leq \varepsilon/2$, puis on prend une somme de Fejer $\sigma_N(f_\varepsilon)$ telle que $||f_\varepsilon - \sigma_N(f_\varepsilon)||_2 \leq \varepsilon/2$. Alors $||f - \sigma_N(f_\varepsilon)||_2 \leq \varepsilon$; c'est le résultat cherché.