

Chapitre 1: Généralités sur la notion d'espace de Hilbert

*

14 février 2008

Ce document contient le plan précis du cours «espaces de Hilbert». Les démonstrations et les explications détaillées seront présentées dans le cours oral.

1 Introduction

Le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943), le premier à avoir introduit de manière systématique les espaces qui maintenant portent son nom, est connu pour les 23 fameux problèmes qu'il proposa au congrès international des mathématiciens en 1900. Ses idées ont profondément marqué l'ensemble des mathématiques jusqu'à l'heure actuelle, en particulier en introduisant des méthodes géométriques en Analyse, donnant ainsi naissance à un domaine important des mathématiques : l'Analyse fonctionnelle.

Les méthodes géométriques présentées dans ce cours sont basées sur la notion de produit scalaire et d'orthogonalité. La théorie des séries de Fourier qui consiste à représenter les fonctions 2π -périodiques sous la forme de séries d'exponentielles complexes $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, est un exemple typique qui a déjà été abordé en Licence 2. Nous reviendrons en détails sur cette question dans un chapitre spécial du cours.

2 Espaces préhilbertiens

Soit V un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

2.1 Définitions

Définition 2.1 : On dit que V est un espace préhilbertien s'il est muni d'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $V \times V$ dans \mathbb{C} appelée produit scalaire et qui pour tous $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfait les conditions suivantes :

- 1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- 2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
- 3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
- 4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ si $x \neq 0$.

*cours sur les espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Licence 3-ième année, Université de Tours, année 2007-2008.

Conséquences immédiates : Pour tous $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a aussi :

$$2') \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

$$3') \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

$$4') \langle 0, y \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0.$$

Remarque : On peut aussi considérer des espaces préhilbertiens sur le corps \mathbb{R} des réels, on parle alors d'espace préhilbertien réel. Le produit scalaire est alors à valeurs réelles. Les conditions 1) à 4) sont les mêmes mais comme $\langle y, x \rangle$ est réel la condition 1) dit simplement que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ de même la condition 2') revient à dire que $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Remarque : On remarquera qu'on utilise la même notation 0 pour désigner le vecteur nul de V et le nombre complexe zéro. Ceci a pour but de ne pas alourdir les notations. Il suffit d'être attentif au contexte pour ne pas faire de confusion. Nous faisons confiance à l'intelligence du lecteur sur ce point.

Exemple 1 : L'espace préhilbertien le plus simple est l'espace \mathbb{C}^d des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_d)$ à coordonnées $x_i \in \mathbb{C}$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur \mathbb{C} et avec le produit scalaire

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i \bar{y}_i,$$

où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$. La norme de x est alors le nombre positif

$$(2) \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Il est facile de vérifier que les propriétés 1) à 4) de la définition 2.1. sont bien satisfaites.

Exemple 2 : Soient $a < b$ des réels. L'espace $C([a, b])$ des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continues muni des deux opérations usuelles somme : $f + g$ et multiplication par un scalaire : λf , avec $f + g : t \mapsto f(t) + g(t)$ et $\lambda f : t \mapsto \lambda f(t)$, est un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On munit $C([a, b])$ d'un produit scalaire en posant

$$(3) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt,$$

pour tous $f, g \in C([a, b])$; la norme de la fonction f étant alors donnée par :

$$(4) \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Exemple 3 : Soit l^2 l'ensemble des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes de carré sommable (i.e. $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$). On montre que pour tous $x, y \in l^2$, la série $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$ est convergente dans \mathbb{C} . Il en résulte que l^2 est un espace vectoriel sur \mathbb{C} pour les opérations usuelles¹ et c'est un espace préhilbertien avec le produit scalaire

$$(5) \quad \forall x, y \in l^2, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \bar{y}_i$$

¹i.e. la somme de deux suites x et y est la suite $(x_i + y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et la suite λx est $(\lambda x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

2.2 Premières propriétés du produit scalaire

On considère toujours un espace vectoriel préhilbertien V sur \mathbb{C} .

Théorème 2.2 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) :

$$(6) \quad \forall x, y \in V, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| (= \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}).$$

Corollaire 2.3 (*Inégalité de Minkowski*) :

$$(7) \quad \forall x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Corollaire 2.4 : *L'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur l'espace vectoriel V . Cette norme est appelée norme euclidienne ou norme associée au produit scalaire.*

Remarque : Dans la suite de ce chapitre et sauf mention contraire, lorsque nous considérons une norme sur un espace préhilbertien, il s'agira toujours de la norme euclidienne.

Exercice : Montrer que le produit scalaire et la norme dans un espace préhilbertien sur \mathbb{C} sont liés par la relation suivante connue sous le nom d'*identité de polarisation* :

$$(8) \quad \forall x, y \in V, 4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2).$$

On notera que dans un espace préhilbertien sur \mathbb{R} l'identité de polarisation est plus simple et s'écrit

$$(9) \quad \forall x, y \in V, 4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Définition 2.5 : *Deux vecteurs $x, y \in V$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On écrira alors pour abrégé $x \perp y$.*

Théorème 2.6 (*de Pythagore*) : *Si $x, y \in V$ sont orthogonaux alors*

$$(10) \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exercices : 1) Montrer que si x_1, \dots, x_k sont des vecteurs de V deux à deux orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.

2) Si $\dim V = d < +\infty$ et si x_1, \dots, x_d sont des vecteurs de V deux à deux orthogonaux et de norme 1, alors ils constituent une base de V et

$$(11) \quad \forall x \in V, x = \sum_{i=1}^d \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Théorème 2.7 (*Égalité du parallélogramme*) :

$$(12) \quad \forall x, y \in V, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Remarque : Ce résultat généralise le résultat bien connu de géométrie plane qui dit que la somme des carrés² des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice (Réciproque du théorème) : Soit V un espace normé sur \mathbb{C} tel que la norme vérifie l'égalité du parallélogramme (12). Alors il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V tel que pour tout $x \in V$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (indication : on pourra utiliser l'identité de polarisation et le fait qu'une application *continue* de V dans \mathbb{C} telle que : $\forall x, y \in V$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(ix) = if(x)$, est forcément linéaire).

²En toute rigueur il faudrait dire la somme des carrés des longueurs des diagonales ...

3 Espaces de Hilbert

3.1 Généralités

L'opération fondamentale en Analyse est le passage à la limite. C'est d'ailleurs par ce fait que l'Analyse se distingue de l'Algèbre. Dans un espace normé, on ne peut pas facilement montrer qu'une suite (ou une série) converge si l'espace n'est pas complet. Cette propriété cruciale doit donc être satisfaite par un espace préhilbertien si on veut y faire correctement de l'Analyse.

Définition 3.1 : *Un espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé espace de Hilbert s'il est complet pour sa norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Rappel important³ : Dans un espace normé complet V , toute série $\sum_n x_n$ de vecteurs de V qui converge normalement (i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$), converge dans V i.e. il existe $s \in V$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=1}^n x_k - s\| = 0$. On dit alors que ce vecteur s est la somme de la série $\sum_n x_n$ et on écrit

$$(13) \quad s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

3.2 Premiers exemples d'espaces de Hilbert

Proposition 3.2 : *L'espace \mathbb{C}^d muni de son produit scalaire canonique donné en (1), est un espace de Hilbert.*

Remarque : De manière plus générale, on sait que tout espace normé (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) de dimension finie est complet.

Proposition 3.3 : *L'espace l^2 des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes de carré sommable (i.e. $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$) muni du produit scalaire défini par la formule (5) est un espace de Hilbert.*

Exercice : Montrer que l'espace préhilbertien $C([a, b])$ muni du produit scalaire défini par la formule (3) n'est pas un espace de Hilbert.

³Voir le polycopié de rappels sur les espaces normés.