Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2010-2011**

Licence de Mathématiques L3 **jeudi 16 décembre 2010**

Epreuve d'Espaces métriques, session 1 (Durée : 3 heures)

Les documents et tout matériel électronique portable sont interdits

Le sujet comporte 3 exercices indépendants. Les énoncés ne doivent être recopiés sur la copie.

Exercice 1

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

I) On munit E de la norme $||.||_1$ définie pour $f \in E$ par

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

et on considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de E définie par : $f_n(x) = 1 - e^{-nx}$.
1) Démontrer que cette suite est de Cauchy dans $(E, ||.||_1)$.
2) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente et si oui vers quelle limite ?

II) Soit $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. Pout tout $f \in F$, on pose

$$||f||_F = |f(0)| + ||f'||_\infty$$

où $||f'||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.
1) Démontrer que $||.||_F$ est une norme sur F.

2) On munit E de la norme $||.||_\infty$ de la convergence uniforme et soit $g \in E$ une fonction fixée. Pour toute $f \in E$, on considère la fonction définie par

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt \quad (x \in [0,1]).$$

a) Vérifier que $\Phi(f) \in F$.
b) Démontrer que Φ est une application linéaire continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(F, ||.||_F)$.
c) Calculer la norme $|||\Phi|||$ de l'application linéaire Φ.

Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application $\Psi : E \to E$ telle que pour tout $f \in E$,

$$\Psi(f)(x) = x + \int_x^1 e^{-t} f(t)dt \quad (x \in [0,1]).$$

1) Vérifier que $\Psi(f) \in E$.

2) Démontrer que l'application Ψ est lipschitzienne de constante de Lipschitz $k < 1$ qu'on calculera (indication : on donne la valeur $e^{-1} \approx 0,368$).

3) Trouver toutes les solutions de l'équation fonctionnelle $\Psi(f) = f$ d'inconnue $f \in E$.

Exercice 3

Les 3 questions de l'exercice sont indépendantes

1) On considère les ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ -2 \leq \frac{\cos(x+y+z)}{x} \leq 2\right\}$
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ln(x^2+y^4+2z^6) = 1\}$
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^4+y^2+\cos(z) = 1\}$.

Préciser en justifiant rigoureusement votre réponse, ceux qui sont compacts et dire pourquoi les autres ne le sont pas.

2) Soit $E = [-2,-1[\cup \{0\} \cup [1,2]$ qu'on munit de la distance usuelle i.e. : $\forall x, y \in E$, $d(x,y) = |x-y|$.
a) Parmi les sous-ensembles $[-2,-1[$, $\{0\}$, $[1,2]$ déterminer ceux qui sont des ouverts, resp. des fermés de l'espace métrique (E,d).
b) $[-2,-1[$ est-il un compact de (E,d) ?
c) Déterminer soigneusement les composantes connexes de (E,d).

3) On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure métrique usuelle (associée à la norme euclidienne) et on considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z) = (x+y, y+z, z).$$

a) Démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui même.

b) En déduire que l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$x^2+2y^2+3z^2-2xy-4yz+2xz = 1,$$

(muni de la métrique induite de $\mathbb{R}^3$) est compact et connexe (indication : on pourra utiliser le fait que la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est connexe).