

Solution détaillée de l'épreuve d'Espaces métriques du 16/12/2010

Exercice 1

I) 1) Pour $n < m$, $\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |e^{-nt} - e^{-mt}| dt = \int_0^1 e^{-nt} |e^{-(m-n)t} - 1| dt \leq 2 \int_0^1 e^{-nt} dt \leq \frac{2}{n}$.
 Pour tout $\epsilon > 0$, posons $N_\epsilon = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$. Alors :

$$n, m \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 \leq \epsilon.$$

Ceci prouve que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

2) Notons $\mathbf{1}_{[0,1]}$ la fonction identiquement égale à 1 (c'est la limite évidente de (f_n) au sens de la convergence simple). On a $\|f_n - \mathbf{1}_{[0,1]}\|_1 = \int_0^1 e^{-nt} dt = \frac{1-e^{-n}}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Donc la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\mathbf{1}_{[0,1]}$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

II) 1) i) $\forall f \in F, \|f\|_F \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \|f\|_F = 0 &\Leftrightarrow |f(0)| = 0 \text{ et } \|f'\|_\infty = 0 \\ &\Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } f'(x) \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow f = C(\text{constante}) = f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

ii) $\forall f \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_F = \lambda \|f\|_F$ (trivial).

iii) $\forall f, g \in F,$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_F &= |(f + g)(0)| + \|(f + g)'\|_\infty \\ &= |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty, \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. D'où $\|f + g\|_F \leq \|f\|_F + \|g\|_F$. Les points i), ii) et iii) prouvent que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F .

2) a) La fonction $x \mapsto \Phi(f)(x)$ est la primitive (nulle en $x = 0$) de la fonction continue $t \mapsto f(t)g(t)$ donc elle est dérivable et de dérivée continue, donc $\Phi(f) \in F$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, f_1, f_2 \in E, \Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ et $\Phi(f_1 + f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$ grâce à la linéarité de l'intégrale. Donc l'application $\Phi : E \rightarrow F$ est linéaire. De plus

$$\forall f \in F, \|\Phi(f)\|_F = |\Phi(f)(0)| + \|\Phi(f)'\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty,$$

(car $\forall x \in [0, 1], |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$). De l'inégalité $\|\Phi(f)\|_F \leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty$ valable pour toute $f \in E$, on déduit que l'application linéaire Φ est continue et que $\|\Phi\| \leq \|g\|_\infty$ (*).

c) Pour la fonction $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, on a $\Phi(\mathbf{1}_{[0,1]})(x) = \int_0^x g(t) dt$, d'où $\|\Phi(\mathbf{1}_{[0,1]})\|_F = \|g\|_\infty$. Comme $\|\mathbf{1}_{[0,1]}\|_\infty = 1$, on en déduit que

$$\|g\|_\infty \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|\Phi(f)\|_F = \|\Phi\| (**).$$

Les deux inégalités (*) et (**) montrent que $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$.

Exercice 2

1) $\Psi(f)$ est la somme des 2 fonctions continues : $x \mapsto x$ et $x \mapsto \int_x^1 e^{-t} f(t) dt$ (qui est continue puisque primitive de $t \mapsto -e^{-t} f(t)$). Donc $\Psi(f)$ est continue i.e. $\Psi(f) \in E$.

2) Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $h \in E$, on a

$$\left| \int_x^1 e^{-t} h(t) dt \right| \leq \int_x^1 |e^{-t} h(t)| dt \leq \|h\|_\infty \int_x^1 e^{-t} dt = (e^{-x} - e^{-1}) \|h\|_\infty \leq (1 - e^{-1}) \|h\|_\infty.$$

Ainsi pour toutes f et g dans E ,

$$\|\Psi(f) - \Psi(g)\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_x^1 e^{-t} (f(t) - g(t)) dt \right| \leq (1 - e^{-1}) \|f - g\|_\infty.$$

Ceci prouve que l'application Ψ est lipschitzienne de constante $0 < k = 1 - e^{-1} < 1$ (car $e^{-1} \approx 0,368$).

3) Comme l'espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet (résultat du cours) et que l'application $\Psi : E \rightarrow E$ est contractante d'après le 2), le théorème du point fixe nous assure alors que l'équation $\Psi(f) = f$ a une solution et une seule dans E . Cette solution vérifie $x + \int_x^1 e^{-t} f(t) dt = f(x)$ ($\forall x \in [0, 1]$) et $f(1) = 1$. Donc f est dérivable et satisfait l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$f'(x) + e^{-x} f(x) = 1$$

avec condition initiale $f(1) = 1$. L'équation sans second membre $\frac{f'(x)}{f(x)} = -e^{-x}$ a pour solution générale $Ce^{e^{-x}}$. Par variation de la constante, on obtient une solution particulière g de l'équation avec second membre de la forme $g(x) = C(x)e^{e^{-x}}$ où $C(x) = \int_0^x e^{-e^{-t}} dt$. La solution f cherchée est donc $f(x) = (C(x) + C_0)e^{e^{-x}}$ où, puisque $f(1) = 1$, la constante C_0 est telle que $(C(1) + C_0)e^{e^{-1}} = 1$ (il est inutile de chercher à avoir une expression plus explicite de C_0).

Exercice 3

1) On sait (résultat du cours) que les compact de \mathbb{R}^3 sont les fermés bornés.

i) A n'est pas compact car il n'est pas borné. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n, 0, 0) \in A$ et $\|(n, 0, 0)\|_2 = n \rightarrow +\infty$.

ii) B est fermé car c'est l'image inverse du singleton $\{1\}$ par l'application continue $(x, y, z) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2z^6)$ (composée des applications continues $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^4 + 2z^6)$ et \ln). B est borné car $(x, y, z) \in B \Leftrightarrow x^2 + y^4 + 2z^6 = e$ donc $x^2 \leq e$, $y^4 \leq e$, $2z^6 \leq e$, ce qui implique $|x| \leq e^{1/2}$, $|y| \leq e^{1/4}$ et $|z| \leq (\frac{e}{2})^{1/6}$. Donc B est compact.

iii) C n'est pas compact car il est non borné. En effet $\forall n \in \mathbb{N}$, $(0, 0, 2\pi n) \in C$ et $\|(0, 0, 2\pi n)\|_2 = 2\pi n \rightarrow +\infty$ (si $n \rightarrow +\infty$).

2) a) Un sous-ensemble de (E, d) est ouvert (resp. fermé) si et seulement s'il est de la forme $E \cap \mathcal{O}$ (resp. $E \cap \mathcal{F}$), où \mathcal{O} est un ouvert (resp. \mathcal{F} est un fermé) de \mathbb{R} (résultat du cours). Ainsi les ensembles $[-2, -1[$, $\{0\}$, $[1, 2]$ sont des ouverts de (E, d) car $[-2, -1[= E \cap]-3, -1[$, $\{0\} = E \cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $[1, 2] = E \cap]\frac{1}{2}, 3[$.

Ces mêmes ensembles sont aussi fermés car

$$[-2, -1[= E \cap [1, 2], \{0\} = E \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ et } [1, 2] = E \cap [1, 2].$$

b) $[-2, -1[$ est un fermé borné de (E, d) mais ce n'est pas un compact car, par exemple, la suite $x_n = -1 - \frac{1}{n}$ n'a aucune sous-suite convergente dans $[-2, -1[$.

c) (E, d) a 3 composantes connexes qui sont $[-2, -1[$, $\{0\}$ et $[1, 2]$. En effet, par exemple il n'existe pas de point $x \in E$ extérieur à $[-2, -1[$ et qui serait connecté à ce sous-ensemble car en prenant les ouverts de $\mathbb{R} : \mathcal{O}_1 =]-3, -\frac{1}{2}[$ et $\mathcal{O}_2 =]-\frac{1}{2}, 3[$, on peut écrire $[-2, -1[\cup \{x\}$ comme réunion des deux ouverts disjoints (et non vides) $[-2, -1[\cap \mathcal{O}_1$ et $\{x\} \cap \mathcal{O}_2$. Le raisonnement est analogue pour les autres composantes.

3) a) Pour tout $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$, le système $X = x + y$, $Y = y + z$, $Z = z$ a une solution est une seule

$$x = X - Y + Z, \quad y = Y - Z, \quad z = Z \quad (*).$$

Ce qui prouve que f est bijective de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R}^3 et que

$$f^{-1} : (X, Y, Z) \mapsto (X - Y + Z, Y - Z, Z).$$

De plus f et f^{-1} sont des applications continues de \mathbb{R}^3 sur lui même car leurs applications coordonnées sont des fonctions polynômes (de degré 1) (donc sont continues). Donc f est un homéomorphisme.

b) On sait que la sphère unité de \mathbb{R}^3 , $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est un ensemble compact et connexe. Or si $(x, y, z) \in S$, d'après (*), le point $f(x, y, z) = (X, Y, Z)$ est tel que $(X - Y + Z)^2 + (Y - Z)^2 + Z^2 = 1$ c'est à dire :

$$X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 - 2XY - 4YZ + 2XZ = 1 \quad (**)$$

L'ensemble $f(S)$ a donc pour équation (**) (car f est bijective de S sur $f(S)$). Comme l'image continue d'un compact (resp. d'un connexe) est un compact (resp. un connexe), l'ensemble $f(S)$ est compact et connexe.