Master M1 et Master Mimats. Corrigé de l'épreuve de Probabilités 2 du 4 Mai 2011. Durée 3h. Session 1

Exercice 1 : 1) La fonction ϕ est de la forme

$$\phi(t)=e^{i\langle m,t\rangle}e^{-\frac{1}{2}\langle t,\Gamma t\rangle}\quad (t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2)$$

avec $\boxed{m=(2,1) \text{ et } \Gamma=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}}$ car $\langle t,\Gamma t\rangle = t_1^2+2t_2^2+2t_1t_2$.

C'est donc la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien de moyenne $m=(2,1)$ et de matrice des covariances Γ d'après un résultat du cours (cf. le formulaire joint au sujet). De plus Γ est bien de type positif car $\langle t,\Gamma t\rangle=(t_1+t_2)^2+t_2^2\geq 0 \quad \forall t$

2) $(X_1,Y_1)=(X,Y)-(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ a une fonction caractéristique

$\varphi_{(X_1,Y_1)}(t)=\varphi_{(X,Y)}(t)\,\varphi_{-(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(t)$ car les vecteurs aléatoires (X,Y) et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ sont indépendants (résultat du cours, cf. le formulaire joint au sujet). Or $\varphi_{(X,Y)}(t)= e^{i(2t_1+t_2)}e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+2t_2^2+2t_1t_2)}$ et

$\varphi_{-(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(t)= e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+\frac{1}{2}t_1t_2+t_2^2)}$ car $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est gaussien, centré de covariance $\begin{pmatrix}1&1/4\\1/4&1\end{pmatrix}$ i.e. $\langle t,\Gamma t\rangle = t_1^2+\frac{1}{2}t_1t_2+t_2^2$

D'où $\boxed{\varphi_{(X_1,Y_1)}(t)= e^{i(2t_1+t_2)}e^{-\frac{1}{2}(2t_1^2+3t_2^2+\frac{5}{2}t_1t_2)}}$: c'est la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien de moyenne $(2,1)$ et de matrice des covariances $\begin{pmatrix}2&5/4\\5/4&3\end{pmatrix}$.

3)a) $\varphi_{(X_1,Y_1)}(t)=\mathbb{E}\left(e^{i(t_1X_1+t_2Y_1)}\right)$. D'où en faisant $t_2=0$.

$\mathbb{E}(e^{it_1X_1})= e^{i2t_1}e^{-\frac{1}{2}(2t_1^2)}$ (fonction caractéristique d'une v.a. normale de moyenne 2 et de variance 2. D'où la densité de X_1 :

$$\boxed{f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Par un résultat du cours (cf. le formulaire ci-joint) on a :

$\mathbb{E}(Y_1|X_1)=\psi(X_1)$ p.s. où $\psi(x)=\frac{1}{f_1(x)}\int_{\mathbb{R}} y f(x,y)\,dy$ et

$f(x,y)$ est la densité de (X_1,Y_1). Posons $g(x)=\int_{\mathbb{R}} y\, f(x,y)\,dy$.

On peut faire le calcul direct de cette intégrale (ce n'est pas la solution la plus simple !), ou remarquer que :

$\frac{\partial\varphi_{(X_1,Y_1)}}{\partial t_2}(t_1,t_2)= i\iint_{\mathbb{R}^2} y\, e^{it_1x}e^{it_2y}f(x,y)\,dx\,dy$ et en faisant $t_2=0$:

$\frac{\partial\varphi_{(X_1,Y_1)}}{\partial t_2}(t_1,0)= i\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{it_1x}\,dx$. D'où par Fourier inverse :

$$g(x)=\frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(u,0)e^{-iux}\,du \quad (\text{on a noté } \varphi=\varphi_{(X_1,Y_1)}). \text{ Or}$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(u,0)=\left(i-\frac{5}{4}u\right)e^{i2u}e^{-u^2}$. D'où

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i2u}e^{-u^2}e^{-iux}\,du-\frac{5}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-iu)e^{i2u}e^{-u^2}e^{-iux}\,du$$

$$= f_1(x)-\frac{5}{2}\frac{d}{dx}f_1(x)=f_1(x)+\frac{5}{4}(x-2)f_1(x)$$

D'où $\boxed{\psi(x)=\frac{g(x)}{f_1(x)}=1+\frac{5}{4}(x-2)}$

i.e. $\boxed{\mathbb{E}(Y_1|X_1)=1+\frac{5}{4}(X_1-2)}$.

Exercice 2 : Partie I :

1) $Y = \begin{cases} X & \text{si } Z=0 \\ 2X & \text{si } Z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y = X\mathbb{1}_{[Z=0]} + 2X\mathbb{1}_{[Z=1]}}$

2) $\mathbb{E}(Y|Z) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{[Z=0]}|Z) + \mathbb{E}(2X\mathbb{1}_{[Z=1]}|Z)$ (linéarité de l'espérance conditionnelle. De plus on a :

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{[Z=0]}|Z) \overset{(1)}{=} \mathbb{1}_{[Z=0]}\mathbb{E}(X|Z) \overset{(2)}{=} \mathbb{1}_{[Z=0]}\mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(2X\mathbb{1}_{[Z=1]}|Z) \overset{(1)}{=} \mathbb{1}_{[Z=1]}\mathbb{E}(2X|Z) \overset{(2)}{=} \mathbb{1}_{[Z=1]}2\mathbb{E}(X)$$

l'égalité (1) car $\mathbb{1}_{[Z=0]}$ et $\mathbb{1}_{[Z=1]}$ sont $\mathcal{B}_Z$ mesurables et dans L^2 et l'égalité (2) car X et Z sont indépendantes (résultat du cours, cf. formulaire joint au sujet). Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y|Z) = np\mathbb{1}_{[Z=0]} + 2np\mathbb{1}_{[Z=1]}}.$$

De même :

$$Y^2 = X^2\mathbb{1}_{[Z=0]} + 4X^2\mathbb{1}_{[Z=1]}$$

et $\boxed{\mathbb{E}(Y^2|Z) = \mathbb{1}_{[Z=0]}\mathbb{E}(X^2) + 4\mathbb{1}_{[Z=1]}\mathbb{E}(X^2)}$

et $\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var} X + (\mathbb{E}(X))^2 = np(1-p) + n^2p^2 = \underline{np(1+(n-1)p)}$.

D'où $\boxed{\mathbb{E}(Y^2|Z) = np(1-(n-1)p)\left[\mathbb{1}_{[Z=0]} + 4\mathbb{1}_{[Z=1]}\right]}$.

3) $\mathbb{E}(Y+Z|Z) = \mathbb{E}(Y|Z) + \mathbb{E}(Z|Z) = \mathbb{E}(Y|Z) + Z$ (déjà calculé)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((Y+Z)^2|Z) &= \mathbb{E}(Y^2 + Z^2 + 2YZ|Z) \\ &= \mathbb{E}(Y^2|Z) + \mathbb{E}(Z^2|Z) + 2\mathbb{E}(YZ|Z) \\ &= \boxed{\mathbb{E}(Y^2|Z) + Z^2 + 2Z\mathbb{E}(Y|Z)}\end{aligned}$$

(toutes ces espérances ont déjà été calculées).

Partie II :

1) $\boxed{\mathbb{E}(X+Y|X)} = \mathbb{E}(X|X) + \mathbb{E}(Y|X) = X + \mathbb{E}(Y) = \boxed{X+1}$

en effet $\mathbb{E}(X|X) = X$ car X est $\mathcal{B}_X$-mesurable et $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ car X et Y sont indépendantes.

$$\mathbb{E}(X^2+Y|Y) = \mathbb{E}(X^2|Y) + \mathbb{E}(Y|Y) = \mathbb{E}(X^2) + Y \text{ car}$$

$\mathbb{E}(X^2|Y) = \mathbb{E}(X^2)$ puisque X^2 et Y sont indépendantes et $\mathbb{E}(Y|Y) = Y$ (cf. ci-dessus). D'où

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2+Y|Y) = Y+2}.$$

2) Le couple $(X, X+Y)$ est gaussien car toute combinaison linéaire $aX + b(X+Y)$ des coordonnées est égale à $(a+b)X + bY$ donc est combinaison linéaire de X et Y donc est de loi normale car X et Y sont indépendantes. On a alors

$$m = (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X+Y)) = (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) = (1, 2).$$

et la matrice des covariances de $(X, X+Y)$ est donnée par :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } \Gamma_{12} = \mathbb{E}(X(X+Y)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X^2) + \underbrace{\mathbb{E}(XY)}_{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ indep.)}} - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) =$$

$= 2 + 1 - 2 = 1$, $\Gamma_{21} = \Gamma_{12} = 1$, $\Gamma_{11} = \operatorname{Var} X = 1$,

$\Gamma_{12} = \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y = 3$ (indépendance de X et Y)

D'où $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. La fonction caractéristique de $(X, X+Y)$ est donc donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2) &= e^{i\langle m, t\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma t\rangle} \quad (t = (t_1, t_2)) \\ &= e^{i(t_1 + 2t_2)} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + 2t_1t_2 + 3t_2^2)}\end{aligned}}$$

D'après un résultat du cours (cf. le formulaire joint au sujet), on a

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = \psi(X+Y), \text{ où}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{f_2(z)} \int_{\mathbb{R}} x f(x,z)\,dx$$

, avec $f(x,z)$ = la densité de $(X, X+Y)$ et $f_2(z)$ = la densité de $(X+Y)$. Comme $X+Y$ est de loi normale de moyenne 2 et de variance 3, on a :

$$\boxed{f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-2)^2}{3}} \quad (z \in \mathbb{R})}$$

. Le calcul de

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} x f(x,z)\,dx$$

se fait à partir de la fonction caractéristique φ du couple $(X, X+Y)$:

$$\varphi(t_1,t_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{it_1 x} e^{it_2 z} f(x,z)\,dx\,dz,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0,t_2) = i\int_{\mathbb{R}} g(z) e^{it_2 z}\,dz = e^{i2t_2} e^{-\frac{1}{2}(3t_2^2)}(i - 2t_2).$$

Par transformation de Fourier inverse, on a donc

$$g(z) = \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(0,v) e^{-ivz}\,dv = \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (i-2v)\underbrace{e^{i2v} e^{-\frac{1}{2}3v^2}}_{\hat{f}_2(v)} e^{-ivz}\,dv$$

$$\Rightarrow g(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i2v} e^{-\frac{1}{2}3v^2} e^{-ivz}\,dv}_{f_2(z)} - \underbrace{2\int_{\mathbb{R}} (-iv) e^{i2v} e^{-\frac{1}{2}3v^2} e^{-ivz}\,dv}_{2\frac{d}{dz}f_2(z)}$$

$$= f_2(z) - 2\left(-\frac{(z-2)}{3}\right) f_2(z).$$

D'où $\boxed{\psi(z) = 1 + \frac{2}{3}(z-2) \text{ et } \mathbb{E}(X|X+Y) = 1 + \frac{2}{3}(X+Y-2).}$

Exercice 3 : 1) Notons d'abord que $Y_n \in L^1$ car $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(e^{aS_n - nb}) = e^{-nb}\mathbb{E}(e^{aS_n}) = e^{-nb}\mathbb{E}(e^{aX_1}e^{aX_2}\cdots e^{aX_n}) = e^{-nb}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(e^{aX_i})$ (indép. des v.a. e^{aX_i})

$= e^{-nb}(\phi(a))^n < +\infty$.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) = e^{-(n+1)b}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(e^{aS_n}e^{aX_{n+1}}) = e^{-(n+1)}e^{aS_n}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(e^{aX_{n+1}})$$

(car $e^{aX_{n+1}}$ et $e^{aS_n} \in L^1$ et e^{aS_n} est $\mathcal{B}_n$-mesurable (cf. formulaire).

$$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) = e^{-(n+1)b}e^{aS_n}\mathbb{E}(e^{aX_{n+1}}) \quad (\text{car } e^{aX_{n+1}} \text{ est indép. de } \mathcal{B}_n)$$

$$= Y_n e^{-b}\phi(a). \quad (*)$$

D'où $\boxed{\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) = Y_n \iff e^{-b}\phi(a) = 1 \iff b = \ln\phi(a).}$

2) On suppose $\mathbb{E}(e^{2aX_i}) = \phi(2a) < +\infty$.

a) $\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}(e^{2aS_n}e^{-2nb}) = e^{-2nb}(\phi(2a))^n < +\infty$ donc $Y_n \in L^2$.

b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y_n^2) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (e^{-2b}\phi(2a))^n < +\infty \iff e^{-2b}\phi(2a) \leq 1 \iff \phi(2a) \leq e^{2b} \iff \boxed{\phi(2a) \leq \phi(a)^2.}$

3) Si $b = \ln\phi(a)$, (Y_n) est une martingale qui n'est pas forcément bornée dans L^2 mais $Y_n \geq 0$ $\forall n$. Un résultat admis (cf. le formulaire) du cours montre que Y_n converge p.s. quand $n \to +\infty$.

4) a) (Y_n) surmartingale $\iff \forall n$ $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) \leq Y_n \iff e^{-b}\phi(a) \leq 1 \iff \phi(a) \leq b$. (Y_n) sous-martingale $\iff \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y_{n+1}) \geq Y_n \iff b \leq \phi(a)$.

b) Le cas sous-martingale est favorable car dans ce cas on $\mathbb{E}(Y_n) \leq \mathbb{E}(Y_{n+1})$, l'espérance est croissante. On a donc intérêt à investir lorsque $\boxed{b \leq \phi(a).}$