Corrigé du Partiel de Probabilités 1 du 12/11/09

Exercice 1 : 1) Considérons les événements

$U_i =$ « on choisit l'urne n° i (au départ) » $(i=1,2,3)$

$A_1 =$ « on tire une boule blanche (au 1er tirage) »

Par hypothèse, on a :

$\mathbb{P}(U_i) = \frac{1}{3} \quad (i=1,2,3)$

$\mathbb{P}(A_1|U_1) = \frac{2}{3}, \ \mathbb{P}(A_1|U_2) = \frac{3}{4}, \ \mathbb{P}(A_1|U_3) = \frac{1}{2}.$

D'après la formule de la probabilité totale, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_1|U_i)\,\mathbb{P}(U_i) = \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{23}{36}.$$

2) On conserve les notations de la question 1 et on pose

$A_2 =$ « on tire une boule blanche au 2e tirage ».

Comme $A_1 \cap A_2 = (A_1\cap A_2 \cap U_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap U_2) \cup (A_1 \cap A_2 \cap U_3)$,

on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_2 | A_1 \cap U_i)\,\mathbb{P}(A_1 \cap U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_2|A_1\cap U_i)\,\mathbb{P}(A_1|U_i)\,\mathbb{P}(U_i)\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{P}(A_2|A_1 \cap U_i)$ on est ramené à la question 1 avec une boule blanche de moins dans

l'urne n° i, donc

$$\mathbb{P}(A_2|A_1\cap U_1) = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{P}(A_2|A_1\cap U_2) = \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

$$\mathbb{P}(A_2|A_1\cap U_3) = \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{7}{12}\cdot\frac{2}{3} + \frac{11}{18}\cdot\frac{3}{4} + \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{41}{36} = \frac{41}{108}.$$

Exercice 2

1) Sachant $X=k$, il y a k personnes qui lisent l'offre d'emploi. Chacune a la probabilité $p=0,1$ de candidater. Si on admet l'indépendance entre les divers lecteurs, on a un schéma de Bernoulli $(X_i)_{1\le i\le k}$ où $X_i = 1$ si la ie personne est candidate et $X_i = 0$ sinon et $\mathbb{P}(X_i=1)=p=0,1$. Le nombre de personnes qui candidatent $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p=0,1)$.

On a donc

$$\mathbb{P}(Y=i|X=k) = C_k^i\, p^i (1-p)^{k-i} = C_k^i (0,1)^i (0,9)^{k-i}.$$

2) Les événements $[X=k]$ forment un système complet $(k \in \mathbb{N})$ et on a donc :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n|X=k)\,\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n|X=k)\,\mathbb{P}(X=k)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n q^{k-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \left(\begin{array}{c} p=0{,}1\,;\, q=1-p \\ \text{et } \lambda=1000 \end{array} \right)$$

$$= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^{k-n}}{(k-n)!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda q} \frac{(\lambda p)^n}{n!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!}.$$

Ceci montre que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda p = 100$. On sait alors que $\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}\, Y = \lambda p = 100$.

Remarque : on pourrait aussi noter qu'on peut écrire $Y = \sum_{i=1}^{X} \mathcal{X}_i$ (somme d'un nombre aléatoire X de variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ indépendantes. Comme $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ $(\lambda = 1000)$ est la fonction génératrice de X et que $G_1(t) = pt+1-p$ est celle de $\mathcal{X}_i$, un théorème du cours nous assure que la fonction génératrice de Y est donnée par

$$G_Y(t) = G_X(G_1(t)) = e^{\lambda(pt+1-p-1)} = e^{\lambda p(t-1)}$$

d'où il résulte que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda p = 100$.

Exercice 3 : 1) $p(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$ est un polynôme de degré k qui peut donc s'écrire

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k.$$

Ainsi on a $|p(X)| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i|\,|X^i|$

Par hypothèse $\mathbb{E}(|X^i|) < +\infty$ (pour tout i) donc $\mathbb{E}(|p(X)|) < +\infty$ i.e. la v.a. $p(X)$ a un moment d'ordre 1 et $\mathbb{E}(p(X))$ existe. On pose alors

$$E(X^{(k)}) = \mathbb{E}(p(X)) \text{ et } E(X^{(0)}) = 1 \text{ (convention)}.$$

2) $G(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i t^i = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i (t-1+1)^i =$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_i \sum_{k=0}^{i} C_i^k (t-1)^k = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \sum_{k=0}^{i} i(i-1)\dots(i-k+1) \frac{(t-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-1)^k}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} p_i\, i(i-1)\dots(i-k+1) \quad \left(\text{interversion des signes } \sum\right)$$

Mais $\sum_{i=k}^{+\infty} p_i\, i(i-1)\dots(i-k+1) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, g(i)$,

où $g(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)$. Un théorème du cours nous assure alors que $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i\, g(i) = \mathbb{E}(g(X)) = E(X^{(k)})$

D'où le résultat :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-1)^k}{k!} E(X^{(k)}).$$

3) La v.a. X de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ a pour fonction génératrice $G(t) = e^{(t-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-1)^k}{k!}$.

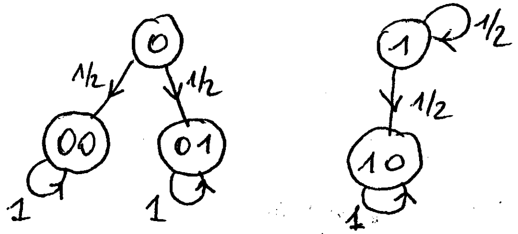
Pour cette v.a. on a $E(X^{(k)}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) si X est de loi $\mathcal{B}(n,p)$, on a :

$$G(t) = (pt+q)^n = (p(t-1)+p+q)^n = (p(t-1)+1)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (p(t-1))^k,$$

Il en résulte que $E(X^{(k)}) = \begin{cases} C_n^k p^k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

Exercice 4 : 1) Au premier lancer on obtient 0 ou 1. Au deuxième coup on obtient 00 01 10 ou 11. Les 3 premières paires font que le jeu s'arrête car l'un des 3 joueurs a gagné. Si c'est 11 qui sort alors tout recommence comme si on avait seulement un 1 donc on revient en fait à l'état 1 (avec probabilité 1/2). L'état 11 s'identifie donc à l'état 1. D'où la chaîne de Markov



La loi initiale est le vecteur de probabilité $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et la matrice des transitions :

$$P = \begin{array}{c} \\ 10 \\ 01 \\ 00 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 10 & 01 & 00 & 1 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \qquad Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice fondamentale de cette chaîne est

$$N = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice des probabilités d'absorption :

$$A = N.R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 10 & 01 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient E_{10}, E_{01} et E_{00} les événements "être absorbé en 10" (resp. en 01, resp en 00). Alors

$$\mathbb{P}(E_{10}) = \sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(E_{10} | X_1 = k) \mathbb{P}(X_1 = k)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(E_{01}) = \sum_{k=0}^{1} \mathbb{P}(E_{01} | X_1 = k) \mathbb{P}(X_1 = k) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

De même $\mathbb{P}(E_{00}) = \frac{1}{4}$.

Pour que le jeu soit équitable les mises doivent être proportionnelles aux probabilités de gagner de chacun des joueurs, c'est à dire :

$$\frac{\text{mise de Jean}}{\mathbb{P}(E_{10})} = \frac{\text{mise de Pierre}}{\mathbb{P}(E_{01})} = \frac{\text{mise de Paul}}{\mathbb{P}(E_{00})} = \frac{2}{1/2} = 4$$

Soit mise de Pierre = mise de Paul $= \frac{1}{4} \cdot 4 = \underline{1\ €}$