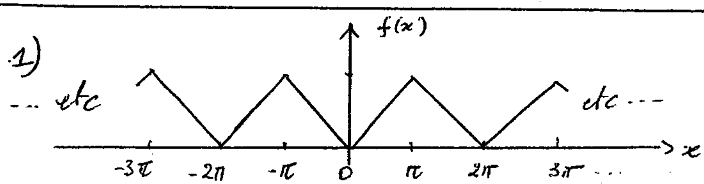
L3 de Mathématiques. Corrigé de l'épreuve du 10 mai 2011
Espaces de Hilbert durée 3 heures.

$\boxed{\boxed{\text{Exercice 1}}}$: 1)



En tout point $x \neq k\pi$, la fonction f est dérivable. Un théorème du cours affirme qu'alors la série de Fourier de f converge au point x et que sa somme vaut $f(x)$ i.e : $S(f)(x) = f(x)$.

2) a) Calculons la série de Fourier sous forme sinus-cosinus :
Pour tout $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\sin(nt)\,dt = 0$ (car la fonction intégrée est impaire). Calculons les coefficients a_n :

$$\boxed{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \boxed{\pi}.$$

$$\boxed{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{t}_{u}\,\underbrace{\cos(nt)}_{v'}\,dt = \text{(intégration par parties)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\underbrace{\left[t\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\right\} = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n^2}\Big[\cos nt\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2} & \text{si } n = 2k-1 \end{cases}} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

D'où la série de Fourier de f :

$$\boxed{S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}}.$$

b) pour tout $n \geq 1$, on a $\cos((2n-1)x) = \dfrac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{2}$

d'où la série de Fourier sous forme exponentielles-complexes :

$$\boxed{S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{(2n-1)^2}}.$$

3) a) La série de Fourier est normalement convergente car

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|-\frac{4}{\pi}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\right| = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2}$ est convergente car

$\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}$ $(n \to +\infty)$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. La convergence normale implique la convergence uniforme donc la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) D'après un théorème du cours, si la série de Fourier converge uniformément, $f(x) = S(f)(x)$ en tout point x, en particulier en tout point $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Avec $x = 0$, on obtient $S(f)(0) = f(0) = 0$. Donc

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 0. \text{ D'où}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}},$$

4) V est un sous-espace de dimension finie $d = 7$ de $H = L^2([-\pi,\pi])$ donc V est fermé dans H. D'après le théorème de projection, $\inf_{g\in V}\|f-g\|_2$ est atteint en un seul point $g \in V$. Précisément on a $g = P_V(f)$: la

projection orthogonale de f sur V et on sait que

$$P_V(f) = \sum_{n=-3}^{3} c_n e^{inx},$$

où $c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt$ car les fonctions e_n, $n \in \{-3,..,3\}$ forment une base hilbertienne de V. On a donc

$$P_V(f) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{2} \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{(2n-1)^2}$$

$$\boxed{P_V(f) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2}\right].}$$

5) Les fonctions $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto h(t)$ sont dans L^2 donc leur produit $t \mapsto |t|\,h(t)$ est une fonction de L^1. L'intégrale $\phi(h)$ a donc un sens et l'application

$$\phi : h \longmapsto \phi(h)\ (\in \mathbb{C})$$

est linéaire (d'après la linéarité de l'intégrale). Donc ϕ est une forme linéaire, De plus, on peut noter que ϕ s'écrit : $\boxed{\phi(h) = \langle f, h \rangle_{L^2}}$ où $f : t \mapsto 2\pi|t|$.

D'après le Théorème de Riesz-Fréchet ϕ est une forme linéaire continue et $\boxed{|||\phi||| = \|f\|_2 = \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}}}$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$: 1) les vecteurs $e^{(n)}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. Ils forment donc une famille orthonormale. Ils forment une base hilbertienne car la famille $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est totale. En effet soit $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell^2$ tel que $\forall n \geq 1$, $\langle x, e^{(n)} \rangle = 0$. Alors $x = 0$ car $\langle x, e^{(n)} \rangle = x_n = 0$ (toutes les composantes de x sont nulles.)

2) a) $V = \{x \in \ell^2 ;\ \forall k \geq 1,\ x_{2k} = 0\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} V_k$ où

$V_k = \{x \in \ell^2 ;\ x_{2k} = 0\}$ ($k \in \mathbb{N}$ est fixé) est le noyau de la forme linéaire continue $f_k : x \longmapsto x_{2k}$ (cette forme linéaire est continue d'après le Théorème de Riesz-Fréchet car $f_k(x) = \langle x, e^{(k)} \rangle$).

V_k est un sous espace vectoriel (comme noyau d'une forme linéaire) et il est fermé car f_k est continue. Ainsi :

- V est un s.e.v comme intersection des s.e.v. V_k et
- V est fermé comme intersection des fermés V_k.

b) $x \in V \iff x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7, 0, \cdots)$

$$\iff x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{2k-1}\, e^{(2k-1)}.$$

Cette écriture montre que les vecteurs $e^{(2k-1)}$, $k \geq 1$, forment une base hilbertienne de V.

c) $y \in V^\perp \iff \forall k \geq 1$, $\langle y, e^{(2k-1)} \rangle = 0$ car les $e^{(2k-1)}$ forment une base hilbertienne de V. Mais $\langle y, e^{(2k-1)} \rangle = y_{2k-1} = 0$.

Donc $y \in V^\perp \iff y = (0, y_2, 0, y_4, 0, y_6, 0, y_8, 0, \cdots)$

$$\iff y = \sum_{k=1}^{\infty} y_{2k}\, e^{(2k)}.$$

Donc les vecteurs $e^{(2k)}$, $k \geq 1$, forment une base hilbertienne de $V^\perp$.

3) W est dense car $\overline{W} = \ell^2$. En effet tout point $x \in \ell^2$ est limite d'une suite de points $(x^{(n)})$ appartenant à W puisque si $x = (x_k)_{k\geq 1}$, $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ dans ℓ^2 où $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ a les mêmes coordonnées que x jusqu'à l'ordre $k=n$ puis $x^{(n)}_k = 0$ si $k > n$.

4) a) $f(x) = \langle x, v \rangle$,

où $v = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}, 0, 0, \dots)$ i.e. $v_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \leq 10 \\ 0 & \text{si } k > 10 \end{cases}$

$v \in \ell^2$ (c'est clair). Le Théorème de Riesz-Fréchet nous indique que f est une forme linéaire continue sur ℓ^2 telle que $|||f||| = \|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$.

b) $\operatorname{Ker} f = \{x \in \ell^2 \,/\, f(x) = 0\} = \{x \in \ell^2 \,/\, \langle x, v \rangle = 0\}$

$= (\mathbb{C}v)^\perp$ (l'orthogonal de la droite engendrée par v)

$\operatorname{Ker} f$ est donc un sous-espace vectoriel fermé puisque c'est le noyau d'une forme linéaire continue. (Notez qu'une autre raison est que $\operatorname{Ker} f$ est l'orthogonal d'une partie de H et que tout orthogonal est un s.e.v. fermé !).

Base hilbertienne de $\operatorname{Ker} f$: Soit H_1 le s.e.v de H engendré par les vecteurs $e^{(k)}$, $k \leq 10$ et H_2 le s.e.v. de H dont une base hilbertienne est constituée par les vecteurs $e^{(k)}$ avec $k > 10$. On a $H = H_1 \oplus H_2$ (somme directe orthogonale) et $H_2 \subset \operatorname{Ker} f$ (clair). De plus $v \in H_1$ (clair) donc si pour $x \in H$, on écrit $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ avec $x^{(1)} = P_{H_1}(x)$ et $x^{(2)} = P_{H_2}(x)$, alors :

$x \in \operatorname{Ker} f \iff x^{(1)} \in \operatorname{Ker} f$ (i.e. $\langle x^{(1)}, v \rangle = 0$). Mais $\operatorname{Ker} f \cap H_1$ est un s.e.v. de H_1 de dimension $\dim(\operatorname{Ker} f \cap H_1) = 9$ (car c'est l'orthogonal du vecteur v dans un espace de dimension 10). Il est facile de trouver 9 vecteurs linéairement indépendants appartenant à $\operatorname{Ker} f \cap H_1$. Il suffit de prendre :

$w^{(1)} = e^{(1)} - 2e^{(2)}$, $w^{(2)} = 2e^{(2)} - 3e^{(3)}$, $w^{(3)} = 3e^{(3)} - 4e^{(4)}$, ..., $w^{(9)} = 9e^{(9)} - 10e^{(10)}$

En orthonormalisant la famille $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(9)}$ par le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une base orthonormale de $\operatorname{Ker} f \cap H_1$: $\tilde{w}^{(1)}, \dots, \tilde{w}^{(9)}$. En lui adjoignant les vecteurs $(e^{(k)})_{k>10}$, on obtient une base hilbertienne de $\operatorname{Ker} f$.

c) $\operatorname{Ker} f = (\mathbb{C}v)^\perp$ donc $(\operatorname{Ker} f)^\perp = (\mathbb{C}v)^{\perp\perp} = \mathbb{C}v$. Une base hilbertienne de $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est donc le vecteur $\frac{v}{\|v\|} = \tilde{v}$.

5) $x = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \in \ell^2$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. La projection orthogonale de x sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est facile à obtenir, c'est :

$$\boxed{P_{(\operatorname{Ker} f)^\perp} = \langle x, \tilde{v} \rangle \tilde{v}.}$$

Comme on sait que $H = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$, on a donc

$$\boxed{P_{\operatorname{Ker} f}(x) = x - P_{(\operatorname{Ker} f)^\perp} = x - \langle x, \tilde{v} \rangle \tilde{v}.}$$