Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Licence de Mathématiques L3**

Corrigé du partiel d'Espaces de Hilbert du 8 mars 2008

Exercice 1

1) a) Puisque $\cos(\theta) = x$, on a $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos(\theta)) = x$, $T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 4x^3 - 3x$.
b) De la formule de trigonométrie bien connue $\cos(n\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)\right)$, on déduit que $T_n(x)T_1(x) = \frac{1}{2}(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x))$, d'où $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Cette formule montre en raisonnant par récurrence sur n que si T_n est de degré n (ce qui est vrai pour $n = 0$, 1, et 2), alors T_{n+1} est de degré $n+1$. Donc T_n est de degré n pour tout entier n.

2) a) Pour $m,\ n \in \mathbb{N}$, et en posant $x = \cos(\theta)$, d'où $dx = -\sin(\theta)d\theta = -\sqrt{1-x^2}d\theta$, on a

$$\begin{aligned} < T_m|T_n > &= \int_{-1}^{1} T_m(x)\overline{T_n(x)}(1-x^2)^{-1/2}dx = \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta))d\theta \end{aligned}$$

D'où

$$< T_m|T_n >= \begin{cases} \pi & \text{si} \quad m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n, \end{cases}$$

ce qui montre que les $(T_n)_{n\geq 0}$ forment une famille orthogonale.
b) D'après ce qui précède, $||T_n||_H = \sqrt{< T_n|T_n >} = \sqrt{\pi}$ si $n = 0$ et $||T_n||_H = \sqrt{\pi/2}$ si $n \neq 0$.

3) Comme $T_n/||T_n||$ est de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel V engendré par la famille orthonormale $(T_n/||T_n||)_{n\geq 0}$ est l'espace de tous les polynômes.
Or on sait d'après le théorème de Weierstrass que V est dense dans l'espace $C([-1,1])$ des fonctions continues pour la norme uniforme donc pour la norme de H (car $||f-g||_H^2 = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^2(1-x^2)^{-1/2}dx \leq ||f-g||_\infty^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}dx = \frac{\pi}{2}||f-g||_\infty^2$).
De plus, on sait d'après un résultat d'intégration que $C([-1,1])$ est dense dans H pour la norme de H. Par transitivité de la relation de densité, on en déduit que V est dense dans H, ce qui prouve que $(T_n/||T_n||)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

4) Soit E_3, le sous espace de H engendré par les polynômes T_n pour $n \leq 3$. C'est l'espace des polynômes de degré ≤ 3. Comme il est de dimension 4 donc finie, il est fermé dans H et il est convexe (car c'est un sous espace vectoriel). Donc on peut projeter orthogonalement sur E_3. Si f désigne la fonction de H[1] $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$, on sait par le théorème de projection que

$$\inf_{P\in E_3} ||f - P||H = ||f - p(f)||_H,$$

où $p(f)$ est la projection de f sur E_3 qui, par un théorème du cours, est donnée par

$$p(f) = \sum_{n=0}^{3} < f|\frac{T_n}{||T_n||} > \frac{T_n}{||T_n||},$$

[1] elle est dans H car elle est continue.

car les $(T_n/||T_n||)_{0\leq n\leq 3}$ forment une base orthonormale de E_3. De plus $p(f)$ est unique. Or $< f,T_0 >= \int_{-1}^{1} dt = 2$, $< f,T_1 >= \int_{-1}^{1} tdt = 0$, $< f,T_2 >= \int_{-1}^{1}(2t^2-1)dt = -\frac{2}{3}$, $< f,T_3 >= \int_{-1}^{1}(4t^3-3t)dt = 0$. D'où

$$p(f)(x) = \frac{2}{\pi}T_0(x) - \frac{4}{3\pi}T_2(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}(2x^2-1) = \frac{1}{3\pi}(10-8x^2).$$

Exercice 2

1) La projection orthogonale H(x,y,z) de M sur le plan $\mathcal{P}$ est telle que le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$ donc colinéaire au vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ normal à $\mathcal{P}$. Il existe donc un scalaire λ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 - x & = & \lambda a \\ y_0 - y & = & \lambda b \\ z_0 - z & = & \lambda c \end{array}\right.$$

et on a $a(x_0-\lambda a) + b(y_0-\lambda b) + c(z_0-\lambda c) = d$ car $H \in \mathcal{P}$. D'où $\lambda = \frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{a^2+b^2+c^2}$. On a donc $d(M,H)^2 = (x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2 = \lambda^2(a^2+b^2+c^2) = \frac{(ax_0+by_0+cz_0-d)^2}{a^2+b^2+c^2}$ et les coordonnées de H sont $x = x_0 - \lambda a$, $y = y_0 - \lambda b$ et $z = z_0 - \lambda c$.

2) a. Le vecteur $\frac{v_0}{||v_0||}$ est unitaire et constitue une base orthonormale de V_0. Par le théorème de projection sur un sous espace vectoriel vu en cours, on a donc

$$p(v) =< p(v)|\frac{v_0}{||v_0||} > \frac{v_0}{||v_0||} = \frac{< p(v)|v_0 >}{||v_0||^2}v_0$$

Mais par la propriété caractéristique de la projection orthogonale, le vecteur $v - p(v)$ est orthogonal à v_0 donc $< p(v)|v_0 >=< v|v_0 >$. D'où $p(v) = \frac{<v|v_0>}{||v_0||^2}v_0$.

b. $d(v,V_0)^2 = ||v - p(v)||^2$.

c. Supposons que le plan est vectoriel i.e. d'équation $ax + by + cz = 0$ et que les coefficients a,b,c sont non nuls (ceci revient à dire que le plan n'est pas parallèles à l'un des axes de coordonnées). Alors les vecteurs $v_0 = (b,-a,0)$ et $v_0' = (0,c,-b)$ appartiennent à $\mathcal{P}$. On peut calculer les projections $p_1(v)$ et $p_2(v)$ de v sur respectivement les droites V_0 et V_0' engendrées par v_0 et v_0', ce qui détermine deux points H sur V_0 et H' sur V_0'. Dans $\mathcal{P}$, on élève alors les perpendiculaires D en H à V_0 et D' en H' à V_0'. D'après le théorème des trois perpendiculaires, les droites D et D' se coupent en un point H'' tel que le vecteur $\overrightarrow{OH''}$ est la projection orthogonale de v sur $\mathcal{P}$ (faire un dessin).

3) a) i) Supposons $e_1 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k e_k$ où les α_k sont des scalaires. Alors pour tout $i = 1,\ldots,n$, $< e_i|e_1 >= \sum_{k=2}^{n} \overline{\alpha_k} < e_i|e_k >$ ce qui prouve que la première colonne du déterminant de Gramm est une combinaison linéaire des $n-1$ autres colonnes. Le déterminant est donc nul, i.e. $G(e_1,\ldots,e_n) = 0$

ii) Le vecteur $\widetilde{e_1} = e_1 - e_1' = e_1 - p_{F_{n-1}}(e_1)$ est orthogonal à F_{n-1} donc aux vecteurs $e_2,\ldots,e_n$. Si on écrit $< e_i|e_1 >=< e_i|\widetilde{e_1} > + < e_i|e_1' >$, on voit que le vecteur première colonne du déterminant de Gram peut s'écrire comme la somme de 2 vecteurs colonne $C_1 + C_1'$ où $C_1 = (< e_i|\widetilde{e_1} >)_{1\leq i\leq n}$ et $C_1' = (< e_i|e_1' >)_{1\leq i\leq n}$. Comme le déterminant est une forme multinéaire par rapport aux vecteurs colonne, on peut donc écrire

$$det(A) = det(A_1) + det(A_1'),$$

où $det(A_1)$ (resp. $det(A_1')$) est le déterminant de la matrice A où on a remplacé la première colonne par le vecteur colonne C_1 (resp. C_1'). Mais on voit immédiatement que

$$det(A_1') = G(e_1', e_2, \ldots, e_n) = 0$$

d'après la question i) car $e'_i \in F_{n-1}$.
Maintenant, le vecteur colonne C_1 a toutes ses coordonnées nulles sauf la première égale à $< e_1|\widetilde{e_1} >=< \widetilde{e_1}|\widetilde{e_1} >$. Si on développe alors $det(A_1)$ par rapport à sa première colonne, on obtient aussitôt :

$$det(A_1) =< \widetilde{e_1}|\widetilde{e_1} > G(e_2, \dots, e_n).$$

D'où le résultat demandé.
On en déduit que si $e_1, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants, alors $G(e_1, \dots, e_n) > 0$. En effet le résultat est trivial si $n = 1$. S'il est vrai pour $n-1$ vecteurs linéairement indépendants disons $e_2, \dots, e_n$: $G(e_2, \dots, e_n) > 0$, alors pour n vecteurs $e_1, \dots, e_n$, en appliquant ce qu'on vient de démontrer, on a aussi $G(e_1, \dots, e_n) =< \widetilde{e_1}|\widetilde{e_1} > G(e_2, \dots, e_n) > 0$ puisque $< \widetilde{e_1}|\widetilde{e_1} >\neq 0$[2] donc est strictement positif.

b) La projection h de x sur V s'écrit $h = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ où les α_j sont des scalaires. Par la propriété caractéristique de la projection orthogonale, $x - h \perp V$, donc $< e_i|x - h >= 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ ce qui se traduit par le système de n équations linéaires

$$< e_i|x >= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < e_i|e_j > \quad j = 1, \dots, n,$$

où les α_j sont les inconnues et le second membre est le vecteur colonne $B = (< e_i|x >)_{1\leq i\leq n}$.
Le déterminant de ce système est $detA = G(e_1, \dots, e_n)$. Notons alors A_j la matrice obtenue en remplaçant la j-ième colonne de la matrice de Gram A par le vecteur colonne B. On détermine les coefficients par les formules de Cramer, c'est à dire

$$\alpha_j detA = detA_j \quad j = 1, \dots, n.$$

D'autre par

$$\begin{aligned} d(x, V)^2 = ||x - h||^2 &=< x - h|x - h >=< x - h|x >=< x|x > - < h|x > \\ &=< x|x > - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j < e_j|x >, \end{aligned}$$

et si on multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $detA$, compte tenu de l'expression de α_j, on voit que

$$detA\ d(x, V)^2 =< x|x > detA - \sum_{j=1}^{n} detA_j < e_j|x >,$$

et le second membre de l'égalité précédente est le développement du déterminant $G(e_1, \dots, e_n, x)$ par rapport à sa dernière colonne d'où la formule demandée.

[2] sinon e_1 serait combinaison linéaire des $e_2, \dots, e_n$