UFR Sciences et Techniques **L3 de mathématiques 2007-2008**

Corrigé de l'épreuve d'Espaces métriques, session 1

Exercice 1

1) On a $||f_n||_\infty = \frac{1}{n}$ et $||f_n|| = 1 + \frac{1}{n}$. Si les normes étaient équivalentes, il existerait des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que $C_1||f|| \leq ||f||_\infty \leq C_2||f||$ pour toute $f \in E$. En particulier pour $f = f_n$, on aurait $C_1(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ pour tout entier n, ce qui est absurde car si $n \to +\infty$, ceci impliquerait $C_1 \leq 0$. Donc les normes ne sont pas équivalentes.

2) a) Pour $0 < n < m$ entiers, la fonction $s_m - s_n$ étant croissante et positive sur $[0, 1]$, le sup de $|s_m - s_n| = s_m - s_n$ est atteint au point $x = 1$ et on a $||s_m - s_n||_\infty = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}$. Or cette quantité tend vers zéro quand n et m tendent vers l'infini (comme reste de la série de Riemann convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$). Donc la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans l'espace normé $(E, ||.||_\infty)$.

b) La fonction $s_{2n} - s_n$ et sa dérivée $s'_{2n} - s'_n$ sont croissantes et positives sur $[0, 1]$ donc leur sup est atteint en $x = 1$ et on a

$$||s_{2n} - s_n|| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Mais $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$. Donc pour $0 < \epsilon < 1/2$, $||s_{2n} - s_n||$ ne peut pas être rendu inférieur à ϵ pour n assez grand. La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ n'est donc pas de Cauchy dans l'espace $(E, ||.||)$.

c) Si l'espace $(E, ||.||_\infty)$ était complet, d'après la question 2 a) la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ devrait être convergente vers une fonction $s \in E$, c'est à dire qu'on aurait

$$||s_n - s|| = ||s_n - s||_\infty + ||s'_n - s'||_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

En particulier $||s_n - s||_\infty \to 0$ et $||s'_n - s'||_\infty \to 0$ donc nécessairement $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. Mais alors $s'(x) = -\frac{ln(1-x)}{x}$ pour $x \in]0, 1[$ ce qui est impossible car cette fonction tend vers $+\infty$ quand $x \to 0$ ou 1. La fonction s ne serait pas de classe C^1. L'espace $(E, ||.||_\infty)$ n'est donc pas complet.

3) a) Pour $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, 1]$, la linéarité de l'intégrale implique $\phi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\phi(f)(x) + \mu\phi(g)(x)$. Donc on a l'égalité entre fonctions : $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$. Ce qui montre que l'application ϕ est linéaire de E dans E (car il est clair que $\phi(f) \in E$ pour toute $f \in E$). De plus pour tout $x \in [0, 1]$, on a

i) $|\phi(f)(x)| \leq ||f||_\infty| \int_0^x t^2 dt| = \frac{x^3}{3}||f||_\infty$, d'où $||\phi(f)||_\infty \leq \frac{1}{3}||f||_\infty$.

ii) $(\phi(f))'(x) = x^2 f(x)$ donc $|(\phi(f))'(x)| \leq |f(x)|$ qui implique $||(\phi(f))'||_\infty \leq ||f||_\infty$.

Ainsi $||\phi(f)|| = ||\phi(f)||_\infty + ||(\phi(f))'||_\infty \leq (\frac{1}{3} + 1)||f||_\infty = \frac{4}{3}||f||_\infty \leq \frac{4}{3}||f||$ ce qui montre que $|||\phi||| \leq \frac{4}{3}$.

b) Le sup de $||\phi(f)||$ pour f dans la boule unité de $(E, ||.||)$ est atteint pour $f_0 \equiv 1$ car pour cette fonction on a $||\phi(f_0)|| = \frac{4}{3}$. Donc $|||\phi||| = \frac{4}{3}$.

c) Pour $f, g \in E$, la linéarité de l'intégrale montre aussitôt que $\psi(f) - \psi(g) = \frac{1}{2}\phi(f - g)$. D'où $||\psi(f) - \psi(g)|| = \frac{1}{2}||\phi(f - g)|| \leq \frac{1}{2}|||\phi|||.||f - g|| = \frac{2}{3}||f - g||$, ce qui implique que l'application ψ est contractante de rapport $k = \frac{2}{3} < 1$. Le théorème du point fixe montre alors que l'équation $f = \psi(f)$ a une solution unique $f \in E$ qu'on peut obtenir par itérations mais plus facilement ici par une équation différentielle car $f = \psi(f)$ équivaut à

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 f(x) + \frac{x^2}{2}, \quad \text{avec} \quad f(0) = 1.$$

L'équation homogène a pour solution $f(x) = Ce^{x^3/6}$. En faisant varier la constante, on obtient $C'(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^3/6}$ donc $C(x) = -e^{-x^3/6} + 2$ (car $C(0) = f(0) = 1$). D'où la solution $f(x) = 2e^{x^3/6} - 1$.

Exercice 2

1) Dans $\mathbb{R}^3$ les compacts sont les ensembles fermés bornés. Les ensembles A et B ne sont pas compacts car ils ne sont pas bornés. En effet $u_n = (1, n, n) \in A$ et $||u_n||_2 = \sqrt{2n^2 + 1} \to +\infty$ si $n \to \infty$ et $v_n = (n, 0, n) \in B$ et $||v_n||_2 = \sqrt{2}n \to +\infty$. Mais C est compact car il est fermé (puisque $C = f^{-1}(\{1\})$ est l'image inverse du fermé $\{1\}$ par la fonction $f(x, y, z) = (x^2+y^2)^2+z^2$ qui est continue puisque polynomiale) et il est borné car pour tout $(x, y, z) \in C$, on a $(x^2 + y^2)^2 \leq 1$ et $z^2 \leq 1$ donc $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ et $|z| \leq 1$.

2) C_2 est un compact de $\mathbb{R}^2$ (c'est le cercle unité) mais C_1 n'est pas compact car il n'est pas borné puisque pour tout entier $n > 0$, $u_n = (n, 1/n) \in C_1$ et $||u_n||_2 = \sqrt{n^2 + 1/n^2} \to +\infty$. Donc C_1 et C_2 ne sont pas homéomorphes. En effet on ne peut pas avoir $C_1 = f(C_2)$ pour une application continue f car par un théorème du cours C_1 devrait être compact.
Autre solution : C_1 est connexe car connexe par arcs comme vu en cours et C_2 n'est pas connexe car réunion des deux fermés disjoints $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = -1\}$ (hyperboles). Comme les applications continues (en particulier les homéomorphismes) conservent la connexité, C_1 et C_2 ne sont pas homéomorphes.

3) a) $A_i = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ comme image inverse de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application continue $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (i-ième application coordonnée). De plus A est convexe puisque pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ dans A et tout $t \in [0, 1]$ $tx + (1 - t)x' \in A$ puisque $tx_i + (1 - t)x'_i > 0$ donc A est connexe par arcs donc connexe.
b) $A = \cup_{i=1}^n A_i$ est ouvert comme réunion d'ouverts et il est connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide (puisque par exemple $(1, \ldots, 1) \in \cap_{i=1}^n A_i$).
c) $\overline{A} := \overline{\cup_{i=1}^n A_i} = \cup_{i=1}^n \overline{A_i}$. En effet $\cup_{i=1}^n A_i \subset \cup_{i=1}^n \overline{A_i}$ et ce dernier ensemble est fermé comme réunion finie de fermés. Donc
i) $\overline{A} =\subset \cup_{i=1}^n \overline{A_i}$ car $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
ii) Mais pour tout i, $\overline{A_i} \subset \overline{A}$ donc $\cup_{i=1}^n \overline{A_i} \subset \overline{A}$. La double inclusion i) et ii) prouve l'égalité $\overline{A} = \cup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
D'autre part $\overline{A_i} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0\}$ car si une suite $x^{(n)} \in A_i$ converge vers une limite x, on a $x_i \geq 0$ (conservation des inégalités larges par passage à la limite). Ainsi finalement $\overline{A}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ dont l'une des coordonnées est positive ou nulle.

4) a) L'application constante $f : (x, y) \mapsto (0, 0)$ est continue mais n'est pas ouverte.
b) f est par définition bijective de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $f(\mathbb{R}^n)$. Soit $O \subset f(\mathbb{R}^n)$ un ouvert (noter que c'est à la fois un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert de $f(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie induite car $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert). L'ensemble $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ est ouvert car f est ouverte donc f^{-1} est continue et f est un homéomorphisme.
c) f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(X, Y) = (x + y, x - y)$ a une solution unique $(x, y) = ((X + Y)/2, (X - Y)/2) := f^{-1}(X, Y)$. Mais les fonctions f et f^{-1} sont continues car leurs coordonnées sont des polynômes (de degré un) donc f est un homéomorphisme et par conséquent est une application ouverte (puisque f^{-1} est continue).

Commentaires et erreurs à éviter

Exercice 1

1) Quelques rares personnes (mais c'est encore trop !) ne savent pas déterminer le sup d'une fonction croissante.

2) a) L'argument exact repose sur le fait que le reste $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}$ de la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, tend vers zéro. Des pseudo-raisonnements du genre : $||s_m - s_n||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$ donc la suite est de Cauchy, ne sont pas valables.

b) Il faut absolument avoir l'égalité

$$||s_{2n} - s_n|| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

pour conclure. Si on a $\leq$ au lieu de $=$, on conclut seulement que $\limsup_{n\to\infty} ||s_{2n} - s_n|| \leq +\infty$, cela ne donne aucun renseignement sur $||s_{2n} - s_n||$.

c) Seul un candidat a su traiter correctement cette question (c'était une bonne copie mais pas la meilleure).

3) a) Un certain nombre de candidats ne comprennent pas ce que signifie la question «montrer que l'application linéaire ϕ est continue» ; ils montrent que la fonction $x \mapsto \phi(f)(x)$ est continue sur $[0, 1]$! ! !

b) Beaucoup trop de gens ne savent pas mener des calculs avec des normes ou ne comprennent pas ce qu'est une norme ; par exemple certains écrivent $||\phi(f)(x)||$ ou $|| \int_0^x t^2 f(t)dt||$ etc... ce qui est absurde car quand on prend la norme, il n'y a plus de variable x ! ! !

b) Autre lacune grave : certains ne savent pas déterminer la dérivée $(\phi(f))'(x) = x^2 f(x)$! ! !

c) La solution exacte $f(x) = 2e^{x^3/6} - 1$ n'a été trouvée que par une seule personne !

Exercice 2

1) Il faut être précis pour montrer que les ensembles A et B ne sont pas bornés et la manière la plus simple est d'exhiber des suites de point de A (et B) qui tendent vers l'infini. Il ne sert à rien alors de montrer que A et B sont fermés.

D'autre part pour montrer que C est borné, de nombreux candidat(e)s (même parmi les meilleur(e)s) utilisent des inégalités fausses ! Par exemple il n'est pas vrai qu'on a

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x^2 + y^2)^2 + z^2$$

car l'inégalité $0 \leq a \leq a^2$ n'est vraie que si $a \geq 1$.

2) Même remarque que pour le 1).

3) a) Il est très important d'écrire A_i comme image inverse de l'ouvert $]0, +\infty[$ par la projection f pour justifier rapidement et de manière élégante que A_i est un ouvert.

b) pour la connexité de la réunion des A_i, il faut absolument vérifier que l'intersection des A_i n'est pas vide !

4) a) Cette question a été bien traitée par la grande majorité des candidats.

b) Beaucoup ne voient pas que f est bijective de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$ par définition.

c) Quand une application est donnée sous forme explicite, pour déterminer son image et voir si elle est bijective, il faut toujours essayer de résoudre l'équation $(X, Y) = f(x, y)$ dont la solution donne aussitôt l'expression de la fonction inverse.

Remarque finale : soyez précis et éviter la surabondance d'explications inutiles qui vous prennent du temps (et qui ne rapportent rien). En sens inverse les affirmations sans justification ne valent rien et les pseudo-raisonnements ponctués de «donc» et se terminant par le résultat demandé ne servent qu'à irriter le correcteur et ne devraient plus figurer sur des copies de troisième année !