



Université François Rabelais de Tours  
École Doctorale Santé, Sciences, Technologies  
Année universitaire 2005/2006

## DOCUMENT DE SYNTHÈSE

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présenté par Jérôme DEPAUW

Pour obtenir le diplôme de

### L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Sujet du mémoire :

Cohomologie intégrable en théorie ergodique

Soutenu le 17 novembre 2006 à Tours devant le jury composé de :

Jean Bertoin,	Professeur à Université Paris 6,
Yves Derriennic,	Professeur à Université de Bretagne Occidentale,
André Goldman,	Professeur à Université Lyon 1,
Emmanuel Lesigne,	Professeur à Université F. Rabelais de Tours,
Marc Peigné,	Professeur à Université F. Rabelais de Tours,
Jean-Paul Thouvenot,	Directeur de Recherche à Université Paris 6,

au vu des rapports d'Yves Derriennic, André Goldman, et Daniel J. Rudolph.

## Remerciements

Mes remerciements vont d'abord aux rapporteurs, notamment à Daniel Rudolph. C'est un honneur pour moi qu'il ait accepté, en tant que spécialiste reconnu des actions multidimensionnelles, de lire mon document de synthèse en français. Mes remerciements vont aussi à André Goldman. Son expertise, en tant que probabiliste extérieur à la communauté de la « théorie ergodique », est très précieuse, et je suis honoré de sa participation à mon jury. Enfin, je tiens à remercier Yves Derriennic, qui fut aussi mon directeur de thèse, et qui depuis n'a jamais cessé de s'intéresser à mes travaux. Ses questions, tout au long de ces dix ans, ont permis l'éclosion du présent travail.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury, tout d'abord Jean Bertoin, spécialiste du mouvement brownien, qui vient apporter un regard extérieur à la théorie ergodique sur mon travail. Je remercie également Jean-Paul Thouvenot, qui fut aussi mon directeur de DEA. Il m'initia à la théorie ergodique et m'en donna, grâce à sa vaste culture, l'image d'un domaine riche et attirant. Il ne manque pas depuis, par ses questions et précieuses indications, de m'aider à avancer dans mon travail. Mes remerciements vont aussi à Emmanuel Lesigne, qui m'a accueilli à Tours il y a dix ans, et qui depuis témoigne sans relâche de sa confiance et de son intérêt pour mon travail de recherche mathématique. Toujours à l'écoute, son soutien dans les périodes difficiles du mûrissement de mes travaux fut remarquable. Je remercie aussi M. Peigné qui a su porter un regard à la fois critique et bienveillant sur les travaux que je lui faisais lire.

Mes remerciements vont à l'équipe entière de Probabilités et Théorie Ergodique, également composée de Léonard Gallardo, Guy Morel, Jean-Claude Picault, Natacha Sandier-Chekhova. Que ce soit dans le cadre du séminaire, ou de l'enseignement des probabilités et statistiques, je retrouve toujours cette équipe avec plaisir.

Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues du Laboratoire/Département, ainsi qu'aux membres non enseignants, pour l'ambiance chaleureuse et sympathique qui y règne, et qui fait qu'il est agréable de venir travailler dans le bâtiment des mathématiciens tourangeaux.

Université François Rabelais  
Tours

École Doctorale  
Santé, Sciences, Technologies

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présenté à  
L'UNIVERSITÉ DE TOURS

par Jérôme DEPAUW

Pour obtenir le diplôme de  
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Cohomologie intégrable en théorie ergodique

OÙ L'ON VOIT QUE DES QUESTIONS DE COHOMOLOGIE DE DEGRÉ SUPÉRIEUR DE SYSTÈMES DYNAMIQUES PROBABILISTES ONT DES APPLICATIONS AU RÉSEAU ÉLECTRIQUE ALÉATOIRE STATIONNAIRE, AUX PROCESSUS BROWNIENS, ET AU FLOT SPÉCIAL.

Soutenu le 17 novembre 2006 à Tours devant le jury composé de :

Jean Bertoin,	Professeur à Université Paris 6,
Yves Derriennic,	Professeur à Université de Bretagne Occidentale,
André Goldman,	Professeur à Université Lyon 1,
Emmanuel Lesigne,	Professeur à Université F. Rabelais de Tours,
Marc Peigné,	Professeur à Université F. Rabelais de Tours,
Jean-Paul Thouvenot,	Directeur de Recherche à Université Paris 6,

au vu des rapports d'Yves Derriennic, André Goldman, et Daniel J. Rudolph.



## Sommaire

Liste des travaux	4
Introduction	5
Cocycles de degré 2 d'actions de $\mathbb{R}^3$ , exemples et applications	12
Cocycles de degré 2 d'actions de $\mathbb{Z}^3$ , exemples et applications	32
Cocycles de degré 1 d'actions de $\mathbb{Z}^d$ et flot spécial	37
Bibliographie	43
Table des matières	46

## Liste des travaux

1. D. BOIVIN et J. DEPAUW – « Spectral homogenization of reversible random walks on  $\mathbb{Z}^d$  in a random environment », *Stochastic Process. Appl.* **104** (2003), no. 1, p. 29–56. (présenté page 36).
2. J. DEPAUW – « Un critère de récurrence pour les cocycles d’actions de  $\mathbb{Z}^d$  », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), no. 5, p. 483–486. (présenté page 39).
3. — , « Théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré deux », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (1997), no. 1, p. 87–90. (présenté page 35).
4. — , « Flux moyen d’un courant électrique dans un réseau aléatoire stationnaire de résistances », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** (1999), no. 3, p. 355–370. (présenté page 36).
5. — , « Génération des cocycles de degré  $\geq 2$  d’une action mesurable stationnaire de  $\mathbb{Z}^d$  », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **22** (2002), no. 1, p. 153–169. (présenté page 32).
6. — , « Degree two brownian sheet in dimension three », *Probab. Theory Related Fields* **135** (2006), no. 3, p. 457–469. (présenté page 25).
7. — , « Cocycle brownien de degré deux et bruit blanc de droites », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **342** (2006), no. 5, p. 337–340. (présenté page 25).
8. — , « Degree two ergodic theorem for divergence-free stationary random fields », A paraître à *Israel Journal of Mathematics*. (présenté pages 12 et 13).
9. — , « Resistivity of an infinite three dimensional stationary random electric conductor », Prépublication. (présenté page 14).

# 1 Introduction

L'objet mathématique modélisant l'évolution d'un observable en fonction d'un paramètre (le temps par exemple) ou de plusieurs (les dimensions spatiales généralement) est le *système dynamique*. Pour étudier les propriétés d'un système dynamique du point de vue statistique, on munit l'espace des observables d'une structure *d'espace probabilisé*. La *théorie ergodique* est la branche des mathématiques qui étudie ces systèmes dynamiques. Elle essaie entre autres de les classer, par exemple en mesurant la quantité de *hasard* qu'ils contiennent, ou en étudiant le type de comportement des *trajectoires* sur une longue période de temps, dans le cas d'un système à un paramètre, ou dans une grande portion d'espace, dans le cas d'un système à plusieurs paramètres. La notion de *cocycle* est l'analogue, pour le système dynamique, de celle de forme différentielle, qui a permis la classification des variétés différentiables en géométrie. Elle est donc une voie naturelle pour l'étude des systèmes dynamiques. Nous avons travaillé à clarifier des questions de cohomologie. D'autre part, comme les formes différentielles, les cocycles ont des connexions avec des problèmes issus de la physique. Sur cet aspect, nous avons entre autres répondu à une question d'électricité posée par Kesten dans [21].

Une somme sur la théorie des systèmes dynamiques est le livre de Katok et Hasselblatt[17].

## 1.1 Présentation de la situation

Considérons un système dynamique probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ , où  $T$  est une action mesurable stationnaire (c'est-à-dire préservant la probabilité  $\mu$ ) du groupe  $\mathbb{Z}^d$  ou  $\mathbb{R}^d$ . Les notions de cocycle pour ces deux groupes étant assez différentes, nous les présentons séparément.

### 1.1.1 Action de $\mathbb{Z}^d$

Dans le cas d'une action de  $G = \mathbb{Z}^d$ , il y a deux notions de cocycles de degré  $k \geq 1$ . La première, due à Westman (voir [38]), est tirée de la théorie des groupes.

**Définition 1** (Westman). Un cocycle de degré  $k \geq 1$  est une fonction  $\alpha^{(k)}$  mesurable définie sur  $\Omega \times G^k$ , vérifiant p.s.  $\omega$ , pour tous  $x_0, \dots, x_k$  dans  $G$ ,

$$\alpha^{(k)}(T_{x_0}\omega, x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0) - \sum_{j=0}^k (-1)^j \alpha^{(k)}(\omega, x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k) = 0,$$

où le chapeau indique la variable omise.

La seconde, due à A. et S. Katok (voir [18]), est inspirée de la géométrie différentielle. On note  $(e_1, \dots, e_d)$  la « base » canonique de  $\mathbb{Z}^d$ , et on pose  $T_i = T_{e_i}$ .

**Définition 2** (A. et S. Katok). Un cocycle de degré  $k = 1, \dots, d$  est un vecteur aléatoire  $f^{(k)} = (f_{i_1, \dots, i_k}^{(k)})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d}$  de dimension  $\binom{d}{k}$  vérifiant p.s.  $\omega$ , pour

tout  $1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq d$

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \delta_{i_j} f_{i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1}}^{(k)} = 0$$

où le chapeau indique l'indice omis, et  $\delta_i = T_i - I$ .

Remarquons que la notion de cocycle de A. et S. Katok est l'analogue discret et dynamique de la notion de forme différentielle fermée de la géométrie différentielle. Il est aussi à noter que la définition de Westman peut s'appliquer à n'importe quel groupe dénombrable, alors que celle de A. et S. Katok est typique de  $\mathbb{Z}^d$ , puisqu'elle utilise une « base ». Cela limite notamment le degré  $k$  des cocycles de A. et S. Katok à la dimension  $d$  du groupe. Enfin, au degré maximal  $k = d$ , un cocycle au sens de A. et S. Katok est simplement une fonction mesurable  $f_{1, \dots, d}^{(d)}$  (la condition  $1 \leq i_1 < \dots < i_{d+1} \leq d$  n'étant pas réalisable).

Notons  $d_k \alpha^{(k)}$  ou  $D_k f^{(k)}$  les membres de gauche apparaissant dans les égalités des deux définitions ci-dessus. L'opérateur  $d_k$  (resp.  $D_k$ ) ainsi défini vérifie  $d_k \circ d_{k-1} = 0$  (resp.  $D_k \circ D_{k-1} = 0$ ). Cela signifie que toute fonction  $\alpha^{(k-1)}$  qui n'est pas un cocycle de degré  $k-1$  définit un cocycle  $\alpha^{(k)}$  non nul de degré  $k$ , par la formule  $\alpha^{(k)} = d_{k-1} \alpha^{(k-1)}$ . Les cocycles  $\alpha^{(k)}$  de degré  $k$  pouvant s'écrire sous la forme  $d_{k-1} \alpha^{(k-1)}$  sont des cobords de degré  $k$  au sens de Westman. On a la notion analogue au sens de A. et S. Katok.

Une remarque simple mais cruciale est qu'au degré 1, les deux définitions de cocycles et de cobords sont équivalentes. La première s'écrit

$$\alpha^{(1)}(\omega, x_1) = \alpha^{(1)}(\omega, x_0) + \alpha^{(1)}(T_{x_0} \omega, x_1 - x_0),$$

et la seconde

$$\delta_i f_j^{(1)} = \delta_j f_i^{(1)}.$$

On passe d'un cocycle de Westman  $\alpha^{(1)}$  à un cocycle de Katok  $f^{(1)}$  par

$$f_i^{(1)}(\omega) = \alpha^{(1)}(\omega, e_i) \quad (1)$$

et réciproquement d'un cocycle de Katok  $f^{(1)}$  à un de Westman  $\alpha^{(1)}$  par (si  $m_1, \dots, m_d \geq 0$ )

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(\omega, (m_1, \dots, m_d)) &= \sum_{i=0}^{m_1-1} f_1^{(1)}(T_1^i \omega) + \sum_{i=0}^{m_2-1} f_2^{(1)}(T_1^{m_1} T_2^i \omega) + \dots \\ &\quad \dots + \sum_{i=0}^{m_d-1} f_d^{(1)}(T_1^{m_1} \dots T_{d-1}^{m_{d-1}} T_d^i \omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Les deux définitions de cobords de degré 1 sont aussi équivalentes, et s'écrivent

$$\begin{cases} f_i^{(1)}(\omega) &= \phi(T_{e_i} \omega) - \phi(\omega) \\ \alpha^{(1)}(\omega, (m_1, \dots, m_d)) &= \phi(T_{(m_1, \dots, m_d)} \omega) - \phi(\omega). \end{cases} \quad (3)$$

où  $\phi$  est une fonction mesurable sur  $\Omega$ . En particulier, dans le cas de la dimension  $d = 1$ , toute fonction  $f^{(1)}$  mesurable est un cocycle de Katok, le cocycle de



Westman associé étant

$$\alpha^{(1)}(\omega, m) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(1)}(T^j \omega) & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m = 0 \\ -\sum_{j=m}^{-1} f^{(1)}(T^j \omega) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (4)$$

De nombreux exemples de cocycles de degré 1 ont été étudiés; le cocycle de degré 1 est en effet un outil dans la construction d'exemples de systèmes dynamiques (flots spéciaux). Cette construction passe d'ailleurs à la dimension  $d \geq 1$  (voir Katok [16]), toujours avec un cocycle de degré 1. De même le très classique théorème ergodique sur la convergence des moyennes de Cesàro de la suite  $(T^j f^{(1)})_j$  suivant l'intégrabilité de  $f^{(1)}$  a une version pour les cocycles de degré 1 d'une action de  $\mathbb{Z}^d$ , voir Boivin et Derriennic [3]. Il est aussi démontré par ces auteurs que les cobords  $L^p$  de degré 1 sont denses dans l'espace des cocycles  $L^p$  de degré 1.

Il y a par contre peu d'études sur les degrés supérieurs. Des travaux algébriques assez abstraits ont été menés à partir de la définition de Westman, pour relier la théorie ergodique à la théorie de la cohomologie des groupes (Feldman-Moore [9]; Westman; Mackey [31]). Notons le résultat essentiel de Feldman-Moore : tout cocycle mesurable de degré  $\geq 2$  d'une action ergodique de  $\mathbb{Z}^d$  est un cobord mesurable. Une version de ce résultat pour la définition de Katok a été démontrée par Lind dans [27] pour le degré  $k = d$ . Cette dernière a entre autres pour conséquence que pour toute action libre ergodique de  $\mathbb{Z}^2$ , pour toute fonction mesurable  $f$  (par exemple  $f \equiv 1$ ) on peut trouver deux fonctions  $f_1^{(1)}$ ,  $f_2^{(1)}$  mesurables telles que

$$f = \delta_1 f_2^{(1)} - \delta_2 f_1^{(1)}.$$

Le résultat de Feldman et Moore a un peu sonné le glas de la voie de la cohomologie des groupes abstraits en théorie ergodique.

Notons aussi le travail de A. et S. Katok qui se place dans un cadre géométrique. L'espace de probabilité est un tore, et l'action  $T$  est engendrée par des automorphismes hyperboliques. Ils démontrent que la cohomologie de classe  $C^\infty$  est triviale aux degrés  $k \leq d - 1$ , et est déterminée par les orbites périodiques au degré  $k = d$ . Ils généralisent ainsi le travail de A. N. Livšic [29], qui portait sur le cas du degré 1 pour une action de  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.2 Action de $\mathbb{R}^d$

Bien que Katok et al. ne considèrent que le cas d'une action de  $\mathbb{Z}^d$ , leur définition de cocycle de degré  $k$  se transpose au cas d'une action de  $\mathbb{R}^d$ , en remplaçant formellement l'opérateur  $\delta_i$  par le générateur infinitésimal  $L^1$  du groupe à un paramètre  $t \mapsto T_{te_i}$ . Cette définition impose que les fonctions considérées appartiennent aux domaines des générateurs infinitésimaux. Cette condition peut être affaiblie, par une méthode analogue à celle utilisée pour définir les distributions. Cette notion faible est notamment considérée par Jikov, Kozlov et Oleinik (J.K.O.), voir [15] :

**Définition 3** (Jikov, Kozlov, Oleinik). Un cocycle de degré  $k = 1, \dots, d$  est un vecteur aléatoire intégrable  $f^{(k)} = (f_{i_1, \dots, i_k}^{(k)})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d}$  de dimension  $\binom{d}{k}$  vérifiant p.s.  $\omega$ , pour toute fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $C^\infty$  et à support compact, pour tous  $1 \leq i_0 < \dots < i_k \leq d$ ,

$$\int_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{j=0}^k (-1)^j f_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_k}^{(k)}(T_x \omega) \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} \phi(x) dx = 0$$

où le chapeau indique l'indice omis.

Notons qu'un vecteur aléatoire intégrable  $f^{(k)} = (f_{i_1, \dots, i_k}^{(k)})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d}$  est un cocycle de degré  $k$  si et seulement si pour presque tout  $\omega$ , la forme différentielle aléatoire de degré  $k$  définie par

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} f_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}(T_y \omega) dy_{i_1} \dots dy_{i_k}$$

est fermée, au sens des distributions. Ces cocycles sont utilisés dans (J.K.O.) pour résoudre des problèmes d'homogénéisation d'opérateurs elliptiques du second ordre, et notamment pour exprimer l'opérateur différentiel limite.

L'analogie de la définition de Westman pour les actions de  $\mathbb{R}^d$  pose un problème de mesurabilité, et de négligeabilité, notamment concernant l'ordre du « p.s.  $\omega$  » et du « pour tout  $x_0, \dots, x_k$  ». Seul le cocycle de degré 1 a été vraiment étudié et en particulier pour  $k = d = 1$ . Dans ce cas, l'analogie de la formule de passage (4) s'écrit

$$\alpha^{(1)}(\omega, x) = \int_0^x f^{(1)}(T_t \omega) dt. \quad (5)$$

Dans cette formule on suppose naturellement que  $f^{(1)}$  est intégrable. L'intégrale ci-dessus a alors un sens en dehors d'un sous-ensemble négligeable  $\subset \Omega$  ne dépendant pas de  $x \in \mathbb{R}$ . La notion adaptée de cocycle de degré 1 est donc

**Définition 4** (degré 1). Un cocycle de degré 1 est une fonction mesurable  $\alpha^{(1)}$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ , vérifiant p.s.  $\omega$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\alpha^{(1)}(\omega, x) = \alpha^{(1)}(\omega, y) + \alpha^{(1)}(T_y \omega, x - y).$$

Le théorème ergodique local donne la formule de passage dans l'autre sens :

$$f^{(1)}(\omega) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \alpha^{(1)}(\omega, x).$$

La définition ci-dessus peut-être reprise sans modification pour définir le cocycle d'une action de  $\mathbb{R}^d$ , toujours de degré 1. Une nuance apparaît cependant dans le lien avec les cocycles de degré 1 au sens de Jikov et al, car la formule analogue de la formule intégrale (5) ci-dessus n'a plus de sens ponctuel, mais seulement en moyenne  $L^1$ . Ce problème, lié à celui du théorème ergodique local, est étudié en détail par Boivin et Derriennic. Ils démontrent aussi le théorème ergodique à l'infini. Le point essentiel est que la condition d'intégrabilité pour la convergence p.s. n'est plus  $L^1$ , mais  $L_{d,1}$  (espace de Lorentz).

Pour finir, mentionnons deux exemples fameux de cocycle de degré 1 non différentiables : Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de Lévy (voir [26]), et sa version poissonnienne proposée par Mandelbrot (voir [32]). Le mouvement brownien de Lévy  $(B_x)_x$  a des propriétés harmoniques mises en évidence par McKean (voir [33]) : lorsque le nombre de paramètres  $d$  est impair, sa covariance à  $x$  fixé

$$c_x(y) = \text{cov}(B_x, B_y)$$

vérifie  $\Delta^{(d+1)/2}c_x(y) = 0$ , sur le domaine  $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x, 0\}$ . McKean en déduit que ce champ aléatoire est markovien d'ordre  $(d-1)/2$  lorsque la dimension  $d$  est impaire, et n'est pas markovien en dimension paire. Goldman a relié le mouvement brownien de Lévy à un processus  $V$  markovien (pour un conditionnement par rapport à un demi-espace) dont les trajectoires vérifient  $\Delta^{(d+1)/2}V = 0$  (voir [13]).

## 1.2 Présentation résumée des résultats

### 1.2.1 degré 1

Nous avons établi un critère de récurrence pour cocycle de degré 1 d'action de  $\mathbb{Z}^d$ , basé sur une hypothèse de type loi faible des grands nombres. Cela permet notamment d'exprimer ce critère dans le cas  $L^1$ , alors que le théorème ergodique ponctuel ne s'applique qu'avec une hypothèse d'intégrabilité plus forte. La question, cruciale du point de vue de la construction des flots spéciaux, d'un critère analogue pour la transience, reste ouverte (voir paragraphe 4 page 37). Cette question de la transience a été aussi étudiée par H. Keynes, K. Madden, N. Markley et M. Sears dans le cas d'un cocycle continu (voir entre autres [22]).

### 1.2.2 degré $\geq 2$ , action de $\mathbb{Z}^d$

Nous avons démontré que les définitions de Katok et Westman donnent les mêmes classes de cohomologie. Cela est fait en généralisant les formules de passage (1) et (2) au cas du degré  $\geq 2$  :

$$\begin{cases} f^{(k)} &= p_k(\alpha^{(k)}) \\ \alpha^{(k)} &= i_k(f^{(k)}) \end{cases}$$

où  $p_k$  et  $i_k$  sont respectivement surjective et injective, et sont réciproques l'une de l'autre aux cobords près :

**Théorème 1.** *Pour tout cocycle de Katok  $f^{(k)}$  on a  $p_k i_k(f^{(k)}) = f^{(k)}$ , et pour tout cocycle de Westman  $\alpha^{(k)}$  on a  $i_k p_k(\alpha^{(k)}) - \alpha^{(k)}$  est un cobord.*

On peut faire la remarque que la surjection  $p_k$  est canonique et assez naturelle, mais que l'injection  $i_k$  l'est moins. Le même résultat est d'ailleurs démontré par Cartan et Eilenberg avec une autre injection (voir [4]). Notre construction est géométrique, basée sur le réseau dual, et donne des cocycles adaptés à la formulation du théorème ergodique : nous avons démontré le théorème ergodique pour les cocycles de Westman de la forme  $i_k(f^{(k)})$ , en moyenne et ponctuel, suivant l'intégrabilité de  $f^{(k)}$  (voir paragraphe 3.2 page 35).

Comme application de ce théorème ergodique, nous avons obtenu l'existence presque sûre du flux surfacique moyen à l'infini du courant stationnaire, dans

un réseau cubique stationnaire (donc infini) de résistances aléatoires. (voir paragraphe 3.3 page 36)

Comme l'ont fait (J.K.O) dans le cas continu, nous avons utilisé les cocycles de Katok pour répondre avec Boivin à une question d'homogénéisation posée par Kesten : nous avons démontré la convergence presque sûre de l'énergie (et donc de la conductivité) dans une cellule extraite d'un réseau cubique stationnaire de résistances aléatoires, lorsque la taille de la cellule tend vers l'infini. (voir paragraphe 3.4 page 36)

Enfin, nous avons démontré sur des exemples que le résultat de Feldman-Moore sur la trivialité de la cohomologie mesurable à partir du degré 2 ne passe pas à la cohomologie intégrable (voir paragraphe 3.1.3 page 34).

### 1.2.3 degré $\geq 2$ , action de $\mathbb{R}^d$

La situation dans le cas continu est en quelque sorte à l'opposée du cas discret. La question de trouver deux définitions de cocycle, une « à la Katok » et une « à la Westman », qui donneraient les mêmes classes de cohomologie, reste ouverte, et semble très délicate. Par contre il y a un candidat très naturel pour jouer le rôle de l'injection  $i_k$ . C'est l'intégrale de la « forme différentielle aléatoire de degré  $k$  »

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} f_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}(T_y \omega) dy_{i_1} \dots dy_{i_k}$$

sur le simplexe  $\Delta(0, x_1, \dots, x_k)$  de dimension  $k$  de sommets  $(0, x_1, \dots, x_k)$ . Cette intégrale n'étant pas définie ponctuellement, mais seulement au sens  $L^1$ , nous avons démontré qu'elle définit un cocycle « à la Westman » dans un sens faible :

**Proposition 1.** *Soit  $f^{(k)}$  un cocycle intégrable de degré  $k$  au sens de J.K.O. Alors l'intégrale*

$$\mathcal{I}_k(f^{(k)})(\omega, x_1, \dots, x_k) = \int_{y \in \Delta(0, x_1, \dots, x_k)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} f_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}(T_y \omega) dy_{i_1} \dots dy_{i_k}$$

est un cocycle intégrable faible de Westman au sens suivant : pour tous  $x_0, \dots, x_k$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a l'égalité dans  $L^1$

$$\mathcal{I}_k(f^{(k)})(T_{x_0} \omega, x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \mathcal{I}_k(f^{(k)})(\omega, x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k),$$

où le chapeau indique la variable omise.

Nous avons pu ainsi généraliser le résultat de Boivin-Derriennic aux degrés supérieurs.

**Proposition 2.** *Soit  $f^{(k)}$  un cocycle intégrable de degré  $k$  au sens de J.K.O. Si sa norme de Lorentz  $L_{d-k+1,1}$  est finie, alors l'intégrale  $\mathcal{I}_k(f^{(k)})(\omega, x_1, \dots, x_k)$  définie ci-dessus admet une version p.s.  $\omega$ , continue en  $x_1, \dots, x_k$ , et qui est un cocycle intégrable fort de Westman au sens suivant : p.s.  $\omega$ , pour tout  $x_0, \dots, x_k$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a l'égalité*

$$\mathcal{I}_k(f^{(k)})(T_{x_0} \omega, x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \mathcal{I}_k(f^{(k)})(\omega, x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k),$$

où le chapeau indique la variable omise.

Nous avons ensuite démontré le théorème ergodique associé, en moyenne dans le cas intégrable, et ponctuel pour la version continue, dans le cas  $L_{d-k+1}$  (voir paragraphe 2.1.2 page 13).

Comme dans le cas discret, nous l'avons appliqué au milieu conducteur aléatoire stationnaire (voir paragraphe 2.2 page 14).

Enfin, nous avons généralisé les constructions de Lévy et Mandelbrot au degré  $k \geq 2$ , ainsi que celle de Čencov (voir [5]) pour la construction d'un modèle indicatrice (voir paragraphe 2.4 page 21).

### 1.3 Présentation résumée des perspectives

Les travaux réalisables à plus ou moins long terme sont de

1. Démontrer sur des exemples que l'intégrabilité  $L_{d-k+1,1}$  est nécessaire pour la convergence ponctuelle dans le théorème ergodique pour cocycle de degré  $k$  en dimension  $d$ ;
2. Trouver le lien entre une définition algébrique type Westman et une définition géométrique type J.K.O. de cocycle de degré  $k$ , dans le cas continu ;
3. Trouver les propriétés harmoniques du cocycle brownien de degré  $k$ , et en déduire ses propriétés markoviennes (voir paragraphe 2.6 page 30) ;
4. Écrire la loi forte des grands nombres pour le cocycle brownien de degré 2.
5. Déterminer le module de continuité p.s. du cocycle brownien de degré 2.
6. Écrire un critère de transience pour cocycle de degré 1 d'action de  $\mathbb{Z}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  plus faible que le théorème ergodique ponctuel (voir paragraphe 4 page 37).
7. Déterminer si le cocycle brownien de degré 2 est un cobord  $L^2$  (la réponse étant « non » pour le degré 1 et « oui » pour le degré  $\geq 3$ ).
8. Ecrire le rôle du cocycle brownien de degré 2 en dimension 3 dans le calcul stochastique, et notamment l'analogue de la formule de Ito.
9. Démontrer un principe d'invariance pour le modèle de Čencov, et le généraliser au cocycle brownien de degré 2 (voir notes 1 et 2 page 21).
10. Déterminer si le théorème de Feldman-Moore sur la trivialité de la cohomologie mesurable de degré  $\geq 2$  des actions de  $\mathbb{Z}^d$  passe au cas continu d'une action de  $\mathbb{R}^d$ .

## 2 Cocycles de degré 2 d'actions de $\mathbb{R}^3$ , exemples et applications

Le cas typique le plus simple du cocycle de degré « général » est celui du degré  $k = 2$  en dimension  $d = 3$ . En effet les cas des degrés extrêmes  $k = 1$  et  $k = d$  présentent des simplifications qui ne se retrouvent pas aux degrés intermédiaires. D'autre part le cas continu, s'il est plus délicat du point de vue mathématique, est aussi plus intuitif. Nous commencerons donc par lui.

### 2.1 Cocycles de J.K.O. de degré 2 en dimension 3

Considérons d'abord la notion de J.K.O. Soit un vecteur aléatoire  $\vec{f} = (f_{i_1, i_2})_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3}$ . Posons  $f_{i, j} = -f_{j, i}$ , et suivant l'usage en dimension  $d = 3$  ordonnons les coordonnées par permutation des indices :  $\vec{f} = (f_{23}, f_{31}, f_{12})$ . Nous avons vu (définition 3) que  $\vec{f}$  est un cocycle de degré 2 de J.K.O. si la forme différentielle aléatoire

$$y \mapsto f_{23}(T_y \omega) dy_2 \wedge dy_3 + f_{31}(T_y \omega) dy_3 \wedge dy_1 + f_{12}(T_y \omega) dy_1 \wedge dy_2$$

est presque sûrement fermée au sens des distributions, c'est-à-dire si le champ aléatoire  $y \mapsto \vec{f}(T_y \omega)$  est de divergence nulle (on notera  $\text{div}_T \vec{f} = 0$ ). Cette notion a de nombreuses interprétations physiques (entre autre : champ magnétique constant dans le temps, champ électrique sans accumulation de charge, champ de vitesse d'un fluide incompressible).

#### 2.1.1 Densité des cobords (*Article 8*)

D'après le théorème de Poincaré, toute forme différentielle fermée sur  $\mathbb{R}^d$  est exacte, ce qui se dit au degré 2 en dimension 3 : tout champ de divergence nulle admet un potentiel vecteur. A  $\omega$  fixé, il existe donc un champ  $\vec{g}_\omega = (g_{\omega i})_i$  tel que  $\vec{f}(T_y \omega) = \text{rot} \vec{g}_\omega(y)$ , c'est-à-dire

$$f_{ij}(T_y \omega) = \frac{\partial g_{\omega j}}{\partial y_i}(y) - \frac{\partial g_{\omega i}}{\partial y_j}(y). \quad (6)$$

Un choix possible pour ce potentiel vecteur est un champ  $y \mapsto \vec{g}(\omega, y)$  représentant l'intégrale du champ  $x \mapsto \vec{f}(T_x \omega)$  entre 0 et  $y$ . Il est défini à  $\omega$  fixé, grâce à la formule classique du calcul différentiel, par

$$g_j(\omega, y) = \int_0^1 s \sum_i y_i f_{ij}(T_{sy} \omega) ds, \quad (7)$$

cette intégrale étant définie à  $y$  fixé comme fonction  $\in L^1(\Omega)$ , mais non ponctuellement (les dérivées de l'équation (6) sont alors à prendre au sens des distributions aléatoires). Il se caractérise, parmi les potentiels du champ  $x \mapsto \vec{f}(T_x \omega)$ , par le fait qu'il est orthoradial (c'est-à-dire que  $\langle \vec{g}(\omega, y), y \rangle = 0$ ). Nous reviendrons plus tard sur l'interprétation de ce champ.

Une question naturelle est : existe-t-il un vecteur aléatoire  $\vec{g}' = (g'_1, g'_2, g'_3)$  défini sur  $\Omega$  tel que pour presque tout  $\omega$ , le champ

$$y \mapsto \vec{g}'(T_y \omega)$$

soit un potentiel vecteur pour le champ  $y \mapsto \vec{f}(T_y\omega)$ ? On obtient ainsi une notion de cobord de degré 2 « à la J.K.O. » :

**Définition 5.** — Un vecteur aléatoire intégrable  $\vec{f}$  est un cobord de J.K.O. de degré 2 si il existe un vecteur aléatoire intégrable  $\vec{g}'$  tel que p.s.  $\omega$  on ait pour toute fonction  $\vec{\phi}$  de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}^3$ , pour tous  $i, j$

$$\int g'_i(T_m\omega) \frac{\partial \phi}{\partial m_j}(m) - g'_j(T_m\omega) \frac{\partial \phi}{\partial m_i}(m) d\lambda(m) = \int \phi(m) f_{i,j}(T_m\omega) d\lambda(m),$$

ces sommes étant prises sur les permutations cycliques de  $(1, 2, 3)$ . On notera  $\vec{f} = \text{rot}_T \vec{g}'$ .

D'après la formule  $\text{div}_T \text{rot}_T = 0$ , tout cobord de J.K.O. de degré 2 est un cocycle de J.K.O. Réciproquement, tout cocycle  $\vec{f}$  de J.K.O. de degré 2 n'est pas un cobord de J.K.O., mais l'on a

**Proposition 3.** *Soit un système dynamique probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, (T_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$  ergodique. Les cobords de J.K.O. de degré 2 d'intégrabilité  $L^p$  sont denses dans l'espace des cocycles de J.K.O. de degré 2, d'intégrabilité  $L^p$  et d'espérance nulle.*

*Schéma de démonstration.* — Cela vient du fait qu'étant donné un cocycle de J.K.O.  $\vec{f}$  de degré 2, d'intégrabilité  $L^p$ , le champ défini par

$$g'_j(\omega, y) = \int_0^1 \sum_i y_i f_{ij}(T_{sy}\omega) ds. \quad (8)$$

vérifie

$$\text{rot}_T \vec{g}'(\cdot, y) = \vec{f} \circ T_y - \vec{f} \quad (9)$$

(noter la ressemblance entre les formules (6) et (7) page 12 d'une part et les formules (8) et (9) ci-dessus d'autre part). En posant alors

$$\vec{g}'_N(\omega) = \frac{3}{4\pi N^3} \int_{\|y\| < N} \vec{g}'(\omega, y) dy,$$

on obtient

$$\text{rot}_T(-\vec{g}'_N) = -\left(\frac{3}{4\pi N^3} \int_{\|y\| < N} \vec{f} \circ T_y dy\right) + \vec{f}$$

ce qui tend bien vers  $\vec{f}$  en norme  $L^p$  si  $\mathbf{E}(\vec{f}) = \vec{0}$ , d'après le théorème ergodique de Wiener (voir [39], ou Krengel [24]).  $\square$

### 2.1.2 Théorème ergodique (Article 8)

Le théorème ergodique s'énonce ainsi :

**Théorème 2.** *Soit un système dynamique probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, (T_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$  ergodique. Soit  $\vec{f}$  un cocycle de J.K.O. de degré 2 (c'est-à-dire engendrant une forme différentielle aléatoire presque sûrement fermée :  $\text{div}_T \vec{f} = 0$ ), de puissance  $p$ -ème intégrable, avec  $p \geq 1$ . Soit  $\theta > 0$ . Notons  $\vec{n}_\Delta$  le vecteur normal orienté d'un triangle orienté  $\Delta$ . Alors*

– la quantité

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f_{23}(T_y \omega) dy_2 \wedge dy_3 + f_{31}(T_y \omega) dy_3 \wedge dy_1 + f_{12}(T_y \omega) dy_1 \wedge dy_2$$

converge en moyenne  $L^p$  vers  $\langle \mathbf{E}(\vec{f}), \vec{n}_{\Delta} \rangle$  (resp. vers  $\langle \vec{f}(\omega), \vec{n}_{\Delta} \rangle$ ) lorsque l'aire  $|\Delta|$  tend vers l'infini (resp. vers 0), uniformément sur l'ensemble des triangles  $\Delta$  admettant  $O$  comme premier sommet et dont les trois angles sont  $\geq \theta$ .

– si de plus  $\vec{f}$  est de norme de Lorentz  $L_{2,1}$  finie, l'expression ci-dessus admet une version p.s. continue par rapport aux sommets libres du triangle, pour laquelle ces convergences ont lieu ponctuellement.

Rappelons que les espaces de Lorentz sont des espaces intermédiaires entre les espaces de Lebesgue. On a notamment

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} L^{2+\varepsilon}(\Omega) \subset L_{2,1}(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

ces inclusions étant strictes. D'autre part le théorème ci-dessus est vrai pour toutes les dimensions  $d$  et tous les degrés  $k$ , la condition d'intégrabilité pour la convergence ponctuelle étant alors la finitude de la norme de Lorentz  $L_{d-k+1,1}$ .

## 2.2 Application à la résistivité dans un milieu aléatoire stationnaire de dimension 3 (*Prépublication 9*)

Le théorème ergodique ponctuel s'applique au problème de la résistivité d'un milieu aléatoire stationnaire. Considérons un tenseur de résistivité stationnaire, c'est-à-dire de la forme  $x \mapsto \mathcal{R}(T_x \omega)$ , où  $\mathcal{R}$  est une matrice aléatoire symétrique définie positive. On se place dans le cas elliptique, c'est-à-dire que l'on suppose qu'il existe deux constantes  $0 < c < C$  telles que les trois valeurs propres de  $\mathcal{R}(\omega)$  soient entre  $c$  et  $C$  quelque soit  $\omega$ . Supposons de plus que le système dynamique sur lequel est défini  $\mathcal{R}$  est ergodique. On se fixe l'espérance  $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$  du flux du courant dans le milieu. Si l'on cherche un courant stationnaire, ce dernier est donné par un champ  $x \mapsto \vec{f}(T_x \omega)$  vérifiant  $\text{div}_T \vec{f} = 0$  au sens faible (loi de conservation du courant). La densité de la puissance dissipée  $x \mapsto P(T_x \omega)$  est donnée par la formule d'Ohm :  $P = \langle \vec{f}, \mathcal{R} \vec{f} \rangle$  (version multidimensionnelle et continue de la loi « la puissance est égale à la résistance que multiplie le carré de l'intensité de courant »). On admet que l'électricité parcourt le milieu de manière à ce que l'espérance de la densité de puissance soit minimale. On vérifie aisément, par une méthode de projection orthogonale type Lax-Milgram, que le système vérifié par  $\vec{f}$  s'écrit

$$(S) \begin{cases} \int_{\Omega} \vec{f} d\mu &= \vec{I} \\ \text{rot}_T \mathcal{R} \vec{f} &= 0 \\ \text{div}_T \vec{f} &= 0 \end{cases}$$

(le champ  $x \mapsto \mathcal{R}(T_x \omega) \vec{f}(T_x \omega)$ , qui est un cocycle de J.K.O. de degré 1, représente alors le champ électrique dans le milieu). L'existence d'une unique solution dans  $L^2(\Omega)$  est démontrée par Golden et Papanicolaou (voir [12]). D'autre part



J.K.O. ont montré l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $\mathcal{R}_0$  telle que

$$\mathbf{E}(P) = \langle \vec{I}, \mathcal{R}_0 \vec{I} \rangle.$$

Soit  $\omega$  fixé. On veut calculer la résistivité effective du milieu. Considérons, dans le milieu comprimé d'un facteur  $R$ , une cellule cubique, de cotés parallèles aux axes, de longueur  $c$  et de centre  $x$ . D'un point de vue macroscopique, elle est traversée par le champ de courant

$$\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega) = \left( \int_{C_i} \langle \vec{f}(T_{Ry}\omega), \vec{e}_i \rangle d\sigma(y) \right)_{i=1, \dots, 3}$$

chaque flux étant pris à travers la section carrée  $C_i$  de la cellule, passant par son centre  $x$  et de normale le  $i$ -ème vecteur  $\vec{e}_i$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . La puissance dissipée dans cette cellule est donnée par

$$P_R(c, x, \vec{I}, \omega) = \int P(T_{Ry}\omega) dy$$

l'intégrale portant sur la cellule elle-même.

D'après la loi d'Ohm, la résistance de cette cellule, pour une direction de courant parallèle à  $\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega)$ , est la quantité  $\rho$  égale à la puissance dissipée que divise le carré de l'intensité de courant :

$$\rho = \frac{P_R(c, x, \vec{I}, \omega)}{\|\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega)\|^2}.$$

Sa résistivité est sa résistance que multiplie sa section et que divise sa longueur, soit

$$\rho \frac{c^2}{c} = c \frac{P_R(c, x, \vec{I}, \omega)}{\|\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega)\|^2}.$$

Supposons pour le moment que l'on puisse, pour tout  $\vec{J} \in \mathbb{R}^3$ , choisir la donnée  $\vec{I}$  de façon à imposer la direction du courant traversant la cellule  $\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega)$  égale à  $\vec{J}$  (cela est vérifié ci-dessous). Notons  $\vec{I}_R(c, x, \vec{J}, \omega)$  la solution  $\vec{I}$ , et  $\tilde{P}_R(c, x, \vec{J}, \omega)$  la puissance dissipée correspondante. La limite du tenseur de résistivité de la cellule est la matrice  $\mathcal{R}_0$  si, quelque soit la direction de courant  $\vec{J}$ , la limite de la résistivité de la cellule est  $\frac{\langle \vec{J}, \mathcal{R}_0 \vec{J} \rangle}{\|\vec{J}\|^2}$ , soit si l'on a la convergence

$$c \frac{\tilde{P}_R(c, x, \vec{J}, \omega)}{\|\vec{J}\|^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\langle \vec{J}, \mathcal{R}_0 \vec{J} \rangle}{\|\vec{J}\|^2}.$$

De plus la résistivité du milieu lui-même converge si la convergence ci-dessus a lieu pour toutes les cellules. Comme cela est expliqué ci-dessous, l'existence d'un ensemble négligeable de réalisations en dehors duquel la convergence ci-dessus a lieu pour toutes les cellules (contenues dans la boule de centre 0 et de rayon 1, voir le corollaire 2) est une conséquence du théorème ergodique ponctuel pour cocycle de de J.K.O. degré 2 dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour pouvoir appliquer ce théorème au vecteur aléatoire  $\vec{f}$ , il faut vérifier que ce dernier a l'intégrabilité  $L_{2,1}$ . C'est ce que nous avons démontré, dans un travail encore à l'état de prépublication (voir annexe) :

**Théorème 3.** *Il existe un  $q > 2$  tel que la solution  $L^2$  du système (S) ci-dessus soit dans  $L^q(\Omega)$ .*

Nous énonçons le théorème ergodique sous une forme légèrement différente de celle énoncée ci-dessus (théorème 2), plus facile à interpréter dans le cadre présent, en « comprimant » le milieu par homothétie, plutôt qu'en faisant tendre les surfaces vers l'infini. On peut ainsi s'affranchir de la condition sur les angles des triangles.

**Théorème 4.** *Soit  $\vec{f}$  un cocycle de J.K.O. de degré 2 d'une action  $T$  stationnaire de  $\mathbb{R}^3$  (c'est-à-dire engendrant une forme différentielle aléatoire presque sûrement fermée :  $\text{div}_T \vec{f} = 0$ ), d'intégrabilité  $L_{2,1}$ . On note  $\mathcal{B}$  la boule de centre  $O$  et de rayon 1. Alors pour presque tout  $\omega$ , le flux du champ  $x \mapsto \vec{f}(T_x \omega)$  est défini à travers tout triangle, et on a la convergence*

$$\int_{\Delta(A,B,C)} \langle \vec{f}(T_{Rx} \omega), d\vec{\sigma}(x) \rangle \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\Delta(A,B,C)} \langle \mathbf{E}(\vec{f}), d\vec{\sigma}(x) \rangle$$

uniformément en  $A, B, C \in \mathcal{B}$ , où  $d\vec{\sigma}$  est le champ infinitésimal normal au triangle  $\Delta$ .

Notons que l'on peut faire une version analogue pour le théorème ergodique de Wiener classique sur les boules, ou plutôt sur les tétraèdres. Elle apparaît comme étant le théorème ergodique pour cocycle de degré 3 :

**Théorème (Wiener).** *Pour  $A, B, C, D \in \mathcal{B}$ , on note  $\tau(A, B, C, D)$  le domaine délimité par le tétraèdre de sommets  $A, B, C, D$ . Alors pour presque tout  $\omega$ , l'intégrale de la fonction  $x \mapsto P(T_x \omega)$  est défini sur tout tétraèdre, et on a la convergence*

$$\int_{\tau(A,B,C,D)} P(T_{Rx} \omega) dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\tau(A,B,C,D)} \mathbf{E}(P) dx$$

uniformément en  $A, B, C, D \in \mathcal{B}$ .

Ces résultats signifient dans notre cadre que le flux de courant à travers les triangles (resp. la puissance dissipée dans les tétraèdres) converge presque sûrement vers leur espérance réciproque, uniformément sur  $\mathcal{B}$ .

Dans ces théorèmes, la donnée  $\vec{I}$  est fixée. Comme le système d'équation (S) est linéaire, on a le principe de superposition des solutions, et on peut faire varier  $\vec{I}$ . Les convergences sont alors aussi uniformes en  $\vec{I}$ , à condition d'imposer que la norme  $\|\vec{I}\|$  reste bornée par une constante positive.

Les deux théorèmes ergodiques énoncés ci-dessus s'écrivent donc sur  $\vec{f}$  et  $P$  :

**Corollaire 1.** — *Soit  $M > 0$ . Pour presque tout  $\omega$ , on a les convergences*

$$\begin{aligned} \vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega) &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} c^2 \vec{I}; \\ P_R(c, x, \vec{I}, \omega) &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} c^3 \langle \vec{I}, \mathcal{R}_0 \vec{I} \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

uniformément en  $\vec{I}$  de norme  $\leq M$ , et en  $c, x$  tels que la cellule de centre  $x$  et de côté  $c$  soit contenue dans la boule  $\mathcal{B}$ .

Remarquons que la solution  $\vec{f}$  du système linéaire ci-dessus variant linéairement par rapport à la donnée  $\vec{I}$ , on peut toujours choisir cette dernière de façon à imposer la direction du courant  $\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega)$  traversant la cellule, lorsque  $R$ ,  $c$ ,  $x$  et  $\omega$  sont fixés, l'injectivité étant garantie (pour  $c$  pas trop petit et  $R$  assez grand) par la première convergence du corollaire ci-dessus. Pour  $c_0 > 0$  fixé,  $R$  assez grand,  $c > c_0$ , et  $\vec{J} \in \mathbb{R}^3$ , notons  $\vec{I}_R(c, x, \vec{J}, \omega)$  la donnée  $\vec{I}$  telle que

$$\vec{J}_R(c, x, \vec{I}, \omega) = \vec{J}.$$

Enfin, notons  $\tilde{P}_R(c, x, \vec{J}, \omega)$  la puissance correspondante dans la cellule. On a :

**Corollaire 2.** *Soit  $c_0 > 0$ . Pour presque tout  $\omega$ , on a la convergence*

$$c \frac{\tilde{P}_R(c, x, \vec{J}, \omega)}{\|\vec{J}\|^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\langle \vec{J}, \mathcal{R}_0 \vec{J} \rangle}{\|\vec{J}\|^2},$$

uniforme en  $\vec{J}$ , et en  $c > c_0$  et  $x$  tels que la cellule de centre  $x$  et de côté  $c$  soit contenue dans la boule  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration*— Remarquons que multiplier  $\vec{J}$  par un scalaire ne change pas les fractions qui apparaissent dans le corollaire. On peut donc supposer que  $\|\vec{J}\| = 1$ . D'après le corollaire 1, la donnée  $\vec{I}$  est proche de  $\vec{J}/c^2$ . L'hypothèse  $c > c_0$  assure donc que  $\|\vec{I}\|$  reste borné. On déduit alors du corollaire 1 que la puissance  $\tilde{P}(\vec{J}) = P(\vec{I})$  est proche de  $c^3 \langle \vec{I}, \mathcal{R}_0 \vec{I} \rangle$ . On a donc  $c\tilde{P}(\vec{J}) \sim \langle \vec{J}, \mathcal{R}_0 \vec{J} \rangle$ , ce qui prouve le corollaire.  $\square$

Comme cela a été dit plus haut, cette convergence signifie que la résistivité limite de toute cellule pour un courant de direction  $\vec{J}$  est  $\frac{\langle \vec{J}, \mathcal{R}_0 \vec{J} \rangle}{\|\vec{J}\|^2}$ , donc que le tenseur de conductivité limite est  $\mathcal{R}_0$ . De plus comme l'ensemble négligeable en dehors duquel il y a convergence ne dépend ni de la cellule, ni de la direction du courant, c'est bien la résistivité effective du milieu lui-même qui converge.

## 2.3 Cocycle de Westman de degré 2 en dimension 3

Au degré 1, le cocycle de Westman  $\alpha$  associé à un cocycle  $\vec{f}$  de J.K.O. s'identifie au potentiel aléatoire (nul en 0) dont dérive le champ aléatoire  $x \mapsto \vec{f}(T_x \omega)$ . Cette identification du potentiel et du cocycle de Westman n'est plus possible pour un cocycle  $\vec{f}$  de J.K.O. de degré 2. On peut cependant considérer le potentiel vecteur aléatoire  $\vec{g}_\omega$  dont dérive le champ à flux conservatif  $x \mapsto \vec{f}(T_x \omega)$ . Ce dernier constitue un objet intermédiaire entre les cocycles de Westman et de J.K.O.

### 2.3.1 Une troisième notion de cocycle de degré 2

Il faut d'abord caractériser les champs susceptibles d'être des potentiels vecteurs de cocycle de J.K.O. Cela nous amène à définir une nouvelle notion de cocycle, appelé « cocycle-potentiel » pour éviter les confusions.

**Définition 6.** Notons  $O$  le point d'origine  $0$  de  $\mathbb{R}^3$ . Un cocycle-potentiel de degré 2 d'intégrabilité  $L^p$  est un champ aléatoire  $(\omega, x) \mapsto \vec{g}(\omega, x)$  tel que l'application  $x \mapsto \vec{g}(\cdot, x)$  soit continue de  $\mathbb{R}^3$  dans  $L^p(\Omega)$ , et vérifie

$$\int_{[A,B]-[A,C]+[B,C]} g_1(\omega, y) dy_1 + g_2(\omega, y) dy_2 + g_3(\omega, y) dy_3 = \int_{[A-\vec{OC}, B-\vec{OC}]} g_1(T_{\vec{OC}}\omega, y) dy_1 + g_2(T_{\vec{OC}}\omega, y) dy_2 + g_3(T_{\vec{OC}}\omega, y) dy_3$$

où  $[A, B] - [A, C] + [B, C]$  est le bord orienté du triangle orienté de sommets  $C, A, B$ .

Remarquons qu'en posant  $B = C = O$  dans la définition de cocycle-potentiel de degré 2, on obtient que l'intégrale de  $\vec{g}$  sur  $[O, A]$  est nulle. Le champ  $\vec{g}$  est donc orthoradial.

D'autre part, étant donné un champ aléatoire  $\vec{g}$ , si l'on pose

$$\alpha^{(2)}(\omega, A, B) = \int_{[A,B]} g_1(\omega, y) dy_1 + g_2(\omega, y) dy_2 + g_3(\omega, y) dy_3 \quad (11)$$

l'équation ci-dessus devient sur  $\alpha^{(2)}$  celle définissant les cocycles de degré 2 de Westman (définition 1), au problème près de la position du « p.s.  $\omega$  » par rapport au « pour tout  $A, B$  » :

$$\alpha^{(2)}(\omega, A, B) - \alpha^{(2)}(\omega, A, C) + \alpha^{(2)}(\omega, B, C) = \alpha^{(2)}(T_{\vec{OC}}\omega, A - \vec{OC}, B - \vec{OC}). \quad (12)$$

**Définition 7.** Un cocycle de Westman faible de degré 2 est une fonction  $\alpha^{(2)}$  mesurable définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  vérifiant, pour tout  $A, B \in \mathbb{R}^3$ , pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , l'équation (12).

La notion de cocycle-potentiel de degré 2 est donc bien l'analogue, du point de vue des champs de vecteurs aléatoires, de celle de cocycle de Westman de degré 2.

Tout cocycle de J.K.O. de degré 2 d'intégrabilité  $L^p$  engendre un cocycle-potentiel, par la formule (7). Réciproquement, pour qu'un cocycle-potentiel de degré 2 d'intégrabilité  $L^p$  soit l'intégrale d'un cocycle  $\vec{f}$  de J.K.O, il faut qu'il vérifie le théorème ergodique local ci-dessus, en norme  $L^p$ , transcrit pour  $\vec{g}$ . Cette transcription se fait de la manière suivante. Soit un triangle  $\Delta = \Delta(O, A, B)$  de premier sommet  $O$ . D'après la formule de Stokes, on a

$$\int_{\Delta} \langle \vec{f}(T_y\omega), d\vec{\sigma}(y) \rangle = \int_{\partial\Delta} \langle \vec{g}(\omega, y), d\vec{\ell}(y) \rangle,$$

où  $d\vec{\ell}$  et  $d\vec{\sigma}$  sont les champs infinitésimaux respectivement normal à  $\Delta$  et tangent à  $\partial\Delta$ , ce qui, d'après l'orthoradialité de  $\vec{g}$  s'écrit encore

$$\int_{[A,B]} \langle \vec{g}(\omega, y), d\vec{\ell}(y) \rangle.$$

Le théorème ergodique local (théorème 2) sur le potentiel  $\vec{g}$  s'écrit donc, en abrégé :

$$\frac{1}{|\Delta(O, A, B)|} \int_{[A,B]} \langle \vec{g}(\omega, y), d\vec{\ell}(y) \rangle \xrightarrow[\substack{|\Delta(O, A, B)| \rightarrow 0 \\ [A, B] \in \mathcal{T}_\theta}]{L^p} \langle \vec{f}(\omega), \vec{n}_\Delta \rangle, \quad (13)$$

où  $\mathcal{T}_\theta$  l'ensemble des segments  $[A, B]$  tels que les trois angles du triangle de sommets  $O, A, B$  soient  $\geq \theta$ . En résumé, pour qu'un cocycle-potentiel  $\vec{g}$  soit le potentiel d'un cocycle  $\vec{f}$  de J.K.O. intégrable, il faut qu'il vérifie la convergence (13). C'est aussi une condition suffisante, comme l'énonce la proposition suivante.

**Proposition 4.** *Soit  $\vec{g}$  un cocycle-potentiel de puissance  $p$ -ième intégrable, de degré 2. S'il vérifie le théorème ergodique local avec pour vecteur aléatoire limite  $\vec{f} = (f_{23}, f_{31}, f_{12})$ , c'est-à-dire si*

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|} \int_{[A, B]} g_1(\omega, y) dy_1 + g_2(\omega, y) dy_2 + g_3(\omega, y) dy_3$$

converge dans  $L^p$  vers  $\langle \vec{f}(\omega), \vec{n}_\Delta \rangle$  lorsque  $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$  tend vers 0 avec  $[A, B] \in \mathcal{T}_\theta$ , alors

- le vecteur aléatoire  $\vec{f}$  est un cocycle de degré 2 de J.K.O, soit encore le champ  $y \mapsto \vec{f}(T_y \omega)$  est p.s. de divergence nulle,
- $\vec{g}$  est le potentiel vecteur associé à  $\vec{f}$  par la formule (7) page 12.

Le théorème ergodique en l'infini s'écrit pour le cocycle-potentiel  $\vec{g}$  :

**Corollaire 3.** *Soit un système dynamique probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, (T_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$  ergodique. Soit  $\vec{g}$  un cocycle-potentiel de puissance  $p$ -ième intégrable, de degré 2 pour lequel il existe un vecteur aléatoire  $\vec{f}$  tel que la convergence (13) ait lieu en norme  $L^p$ . Alors*

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|} \int_{[A, B]} g_1(\omega, y) dy_1 + g_2(\omega, y) dy_2 + g_3(\omega, y) dy_3$$

converge dans  $L^p$  vers  $\langle \mathbf{E}(\vec{f}), \vec{n}_\Delta \rangle$  lorsque  $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$  tend vers l'infini avec  $[A, B] \in \mathcal{T}_\theta$ . Si de plus le vecteur aléatoire  $\vec{f}$  est de norme de Lorentz  $L_{2,1}$  finie, alors l'intégrale ci-dessus admet une version p.s.  $\omega$  continue en  $A, B$ , pour laquelle la convergence a lieu ponctuellement.

La notion de cocycle-potentiel présentée dans ce paragraphe a deux intérêts (autres que l'énoncé du théorème ergodique) sur lesquels nous reviendrons par la suite : d'une part elle fait un lien entre les cocycles de Westman et de J.K.O. par les formules (7) et (11), d'autre part elle permet de définir une propriété de Markov.

### 2.3.2 Cocycles de Westman

Nous avons vu comment passer d'un cocycle  $\vec{f}$  de J.K.O. de degré 2 à un cocycle-potentiel (formule (7) page 12) puis à un cocycle de Westman faible (formule (11) page 18); la formule de passage directe d'un cocycle de J.K.O. au cocycle de Westman  $\mathcal{I}_2(\vec{f})$  qu'il engendre a été présentée dans l'introduction (propositions 1 et 2 page 10). Réciproquement, nous avons vu comment passer d'un cocycle-potentiel à un cocycle de J.K.O., à l'aide du théorème ergodique local (proposition 4 page 19). Il reste donc à étudier le passage d'un cocycle de Westman à un cocycle-potentiel, comme cela ce voit sur le tableau récapitulatif ci-dessous :



Rappelons qu'au degré 1, il y a identification du potentiel  $F$  nul en  $O$  et du cocycle de Westman, ce qui donne le tableau

$$\boxed{\vec{f} \text{ tel que } \operatorname{grad}_T \vec{f} = 0} \quad \begin{array}{c} \text{voir Boivin-} \\ \text{Derriennic} \end{array} \quad \boxed{F = \alpha^{(1)} \text{ cocycle} \\ \text{de Westman faible}}$$

Pour notre dernière flèche (notée « ? » ci-dessus), il y a d'abord des conditions nécessaires de régularité. Par exemple l'équation (11), et la continuité de  $\mathbb{R}^3$  dans  $L^1$  de la fonction  $A \mapsto \vec{g}(\cdot, A)$  (imposée dans la définition 6 page 17) impliquent entre autre la convergence dans  $L^1$  suivante :

$$\frac{\alpha^{(2)}(\omega, A, A + t\vec{u})}{t} - \langle \vec{g}(\omega, A), \vec{u} \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (14)$$

pour tout  $\vec{u}$  de norme 1. Un cocycle de Westman vérifiant cette propriété pourrait être dit  $L^1$ -continûment linéarisable, ou  $L^1$ -continûment différentiable.

Il y a aussi une obstruction algébrique. Nous avons vu qu'un cocycle-potential  $\vec{g}$  est toujours orthoradial, c'est-à-dire que sa circulation le long d'un segment  $[A, B]$  est nulle si les points  $O, A, B$  sont alignés. Sur le cocycle de Westman  $\alpha^{(2)}$  correspondant par la formule (11), cela donne

$$\text{si les points } O, A, B \text{ sont alignés, alors } \alpha^{(2)}(\omega, A, B) = 0. \quad (15)$$

Or cette égalité n'est pas impliquée par l'équation (12) définissant les cocycles de Westman de degré 2.

Les conditions (14) et (15) sont suffisantes, comme c'est énoncé dans la proposition suivante.

**Proposition 5.** *Soit  $\alpha^{(2)}$  un cocycle de Westman faible de degré 2 intégrable, vérifiant l'équation (15) et tel qu'il existe un champ aléatoire  $\vec{g}$  tel que la fonction  $A \mapsto \vec{g}(\cdot, A)$  soit continue de  $\mathbb{R}^3$  dans  $L^1$  et vérifie (14). Alors  $\vec{g}$  est un cocycle-potential dont se déduit  $\alpha^{(2)}$  par la formule (11) page 18.*

*Schéma de démonstration.* — Soient deux points  $A, B$  fixés. Soit  $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ . Soit la fonction  $k$  à valeur dans  $L^1$  définie par

$$k(s) = \alpha^{(2)}(\cdot, A, A + s\vec{u}).$$

On a, d'après l'équation (15), et la définition de cocycle de Westman de degré 2 :  $k(0) = 0$  et

$$k(t+s) - k(s) = \alpha^{(2)}(\cdot, A + s\vec{u}, A + (t+s)\vec{u}),$$

donc, en faisant tendre  $t$  vers 0, d'après l'équation (14),

$$k'(s) = \langle \vec{g}(\cdot, A + s\vec{u}), \vec{u} \rangle.$$

La fonction  $A \mapsto \vec{g}(\cdot, A)$  étant continue par hypothèse,  $k'$  l'est aussi ;  $k$  est donc l'intégrale de sa dérivée :  $k(\|\vec{AB}\|) = \int_0^{\|\vec{AB}\|} k'(s) ds$ , ce qui donne bien la formule (11) :  $\alpha^{(2)}(A, B) = \int_{[A, B]} \langle \vec{g}, d\vec{\ell} \rangle$ .  $\square$

Cette proposition n'est certainement pas optimale, mais elle a l'intérêt de clarifier le lien entre les différentes notions de cocycle de degré 2. Elle est à

améliorer dans le sens suivant : soit  $\beta^{(2)}$  un cocycle de Westman tel que l'une des conditions (14) ou (15) n'est pas vérifiée. Est-il alors cohomologue à un cocycle de Westman  $\alpha^{(2)}$  associé à un cocycle-potentiel  $\vec{g}$  par la formule (11) ? Soit encore, tout cocycle de Westman est-il cohomologue à un cocycle vérifiant les conditions (14) et (15) ?

Pour finir, donnons un exemple de cocycle de Westman ne vérifiant pas la condition (14), et d'un ne vérifiant pas la condition (15). Soit

$$\beta^{(2)}(\omega, A, B) = \|\overrightarrow{OA}\|^3 + \|\overrightarrow{AB}\|^3 - \|\overrightarrow{OB}\|^3.$$

Alors  $\beta^{(2)}$  est un cocycle de Westman ne vérifiant pas la condition (15). Un cocycle ne vérifiant pas la condition (14) est étudié dans le paragraphe suivant.

## 2.4 Exemple brownien

Dans le paragraphe 2.2 sur la résistivité du milieu aléatoire, nous avons présenté un exemple de cocycle de Westman de degré 2 construit à partir d'un cocycle de J.K.O. Dans le paragraphe ci-dessous, nous présentons un cocycle de degré 2 qui ne vient pas d'un cocycle de J.K.O., puisqu'il ne vérifie pas le théorème ergodique local. Cet exemple s'appuie sur le drap brownien de  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.4.1 Processus browniens classiques à 1 et 2 paramètres

**Mouvement brownien.** Une construction simple du mouvement brownien usuel, sur l'intervalle  $[0, 1]$ , s'inspire de la notion de bruit blanc. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_k)_{k \geq 1}$ , de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Soit  $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, dont la loi est l'équiprobabilité sur  $\{-1, 1\}$ . On suppose que les deux suites sont indépendantes. Soit pour tout entier  $n$  fixé, le processus  $P_n$  défini sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{1}_{[0,t]}(X_k).$$

Alors, d'après le théorème limite central, ce processus converge en loi (au sens où les marginales finies convergent) vers un processus gaussien  $(B(t))_t$  dont la moyenne et la covariance sont données par

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbf{E}(\varepsilon_1 \mathbf{1}_{[0,t]}(X_1)); \\ c(s, t) &= \text{cov}\left(\varepsilon_1 \mathbf{1}_{[0,t]}(X_1), \varepsilon_1 \mathbf{1}_{[0,s]}(X_1)\right). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que  $m(t) = 0$  et  $c(s, t) = \min(s, t)$ , donc le processus  $B$  est le mouvement brownien<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>On a de plus un « principe d'invariance », c'est-à-dire la convergence de la loi des trajectoires du processus  $P_n$  vers la mesure de Wiener. Cela se démontre grâce à un théorème de convergence en loi pour martingales. En effet pour tout  $n$ , le processus  $(P_n(t))_t$  est une martingale. De plus son crochet  $A_n = [P_n, P_n]$  se calcule explicitement :  $A_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[0,t]}(X_k)$ . Il vérifie donc, pour  $t$  fixé, la convergence en loi  $A_n(t) \mapsto t$  pour  $n$  tendant vers l'infini. Enfin, le processus à trajectoires continues  $(Y_n(t))_t$ , obtenu à partir de  $P_n$  par interpolation linéaire, vérifie  $\sup_t |P_n(t) - Y_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , puisque les sauts de  $P_n$  sont bornés par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . D'après la proposition 7.3.26 du livre de Dacunha-Castelle (tome 2 [6], ou le théorème 5 page 51 du

**Drap brownien** Cette construction passe au drap brownien sur  $[0, 1]^2$ , en remplaçant les variables  $X_k$  par des vecteurs aléatoires  $\vec{X}_k$  de loi uniforme sur  $[0, 1]^2$  et en prenant

$$P_n(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{1}_{[0, t_1] \times [0, t_2]}(\vec{X}_k).$$

On obtient bien pour covariance  $c((s_1, s_2), (t_1, t_2)) = \min(s_1, t_1) \min(s_2, t_2)$ .

**Mouvement brownien à plusieurs paramètres.** Enfin cette construction passe au mouvement brownien à plusieurs paramètres de Lévy, présenté dans [26]. Décrivons le cas de deux paramètres. En nous inspirant du travail de Cencov [5], nous considérons une suite de vecteurs aléatoires indépendants  $(\vec{X}_k)_{k \geq 1}$ , où  $\vec{X}_k = (R_k, \Theta_k)$  est de loi uniforme sur  $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$ . Pour tout point  $x$  du plan, on note  $A_x$  l'ensemble des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  correspondant à des points  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  qui sont dans le disque de diamètre  $[0, x]$ . Si l'on note  $(r_x, \theta_x)$  les coordonnées polaires de  $x$ , l'ensemble  $A_x$  s'exprime par

$$A_x = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq r_x \cos(\theta - \theta_x)\}.$$

Soit alors, pour un entier  $n$  fixé, le processus défini sur la boule de  $\mathbb{R}^2$  de centre 0 et de rayon 1 par

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{1}_{A_x}(\vec{X}_k).$$

Ce processus converge donc (au sens où les marginales finies convergent<sup>2</sup>) vers un processus gaussien, de covariance

$$\text{cov}(\varepsilon_k \mathbf{1}_{A_x}(\vec{X}_k), \varepsilon_l \mathbf{1}_{A_y}(\vec{X}_l)) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \mathbf{1}_{A_x \cap A_y}(r, \theta) dr d\theta.$$

Il y a plusieurs façons de calculer cette covariance. Dans son livre [28], Lifshits utilise une théorie assez générale sur les modèles pour covariances de processus gaussiens. Le calcul est aussi fait par Cencov, à partir des propriétés géométriques de la mesure  $dr d\theta$  (voir ci-dessous). En dimension 2, il peut se faire explicitement de la manière suivante. Quitte à translater la période d'intégration  $[-\pi, \pi]$ , et/ou à échanger  $x$  et  $y$ , on peut supposer que  $\theta_x < \theta_y < \theta_x + \pi$ . Notons  $\psi$  la coordonnée angulaire du point d'intersection des deux cercles bordant les disques  $A_x$  et  $A_y$ , c'est-à-dire l'angle  $\psi \in ]\theta_x, \theta_y[$  déterminé par l'équation  $r_y \cos(\psi - \theta_y) = r_x \cos(\psi - \theta_x)$ . Le domaine de l'intégrale double ci-dessus est la réunion des deux domaines

$$\mathcal{D}_1 = \{(r, \theta); \theta_y - \frac{\pi}{2} < \theta < \psi, 0 < r < r_y \cos(\theta - \theta_y)\}$$

---

Mémoire de Rebolledo [34]), cela montre que la suite des lois des processus  $Y_n$  est tendue pour la topologie de la convergence uniforme sur l'espace  $\mathcal{C}([0, 1])$  des fonctions continues. L'identification de la loi limite étant immédiate, cela montre que la suite  $(Y_n)_n$  converge en loi vers le mouvement brownien à trajectoires continues. On en déduit que la suite  $(P_n)_n$  converge aussi en loi.

<sup>2</sup>La démonstration du principe d'invariance évoquée dans la note 1 précédente reposant sur une propriété de martingale, elle ne passe pas aisément à la dimension supérieure. La question d'un principe d'invariance pour le modèle de Cencov est encore à l'étude.



$$\mathcal{D}_2 = \left\{ (r, \theta), \psi < \theta < \theta_x + \frac{\pi}{2}, 0 < r < r_x \cos(\theta - \theta_x) \right\}$$

En intégrant en  $r$  puis en  $\theta$ , l'intégrale double ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} \left( r_x + r_y + r_y \sin(\psi - \theta_y) - r_x \sin(\psi - \theta_x) \right). \quad (16)$$

Or comme  $\psi$  vérifie  $\left( r_x \cos(\psi - \theta_x) - r_y \cos(\psi - \theta_y) \right)^2 = 0$ , on a

$$\left( r_x \sin(\psi - \theta_x) - r_y \sin(\psi - \theta_y) \right)^2 = r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta_y - \theta_x).$$

En remplaçant dans (16), cela donne

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( r_x + r_y - \sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta_y - \theta_x)} \right), \\ &= \frac{1}{2} (\|x\| + \|y\| - \|x - y\|), \end{aligned}$$

ce qui est bien la covariance du mouvement brownien  $(B_x)_{x \in \mathbb{R}^2}$  à plusieurs paramètres de Lévy. Il est à noter que la probabilité uniforme sur  $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ , ou plus exactement la mesure uniforme sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ , a une interprétation géométrique. En effet si  $(r, \theta)$  représente un système de coordonnées pour la droite affine passant par le point  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  et tangente au cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ , alors la mesure  $dr d\theta$  est la mesure uniforme sur l'espace des droites affines, c'est-à-dire la mesure invariante par les isométries affines de  $\mathbb{R}^2$ . Le domaine  $A_x$  représente alors l'ensemble des droites sécantes au segment  $[O, x]$ .

Remarquons que la restriction du champ aléatoire  $B$  à une demi-droite affine donnée suit la loi du mouvement brownien classique à 1 paramètre, c'est-à-dire, pour tout point  $x$  et tout vecteur  $\vec{u}$  de norme 1 le processus défini par

$$t \mapsto B_{x+t\vec{u}} - B_x$$

est un mouvement brownien de  $\mathbb{R}_+$ . C'est une conséquence immédiate de la formule  $\min(s, t) = (|s| + |t| - |s - t|)/2$ . Cette propriété est caractéristique : à l'origine, Lévy a défini son mouvement brownien à plusieurs paramètres comme étant le processus à accroissements stationnaires, nul en 0, dont les restrictions aux demi-droites affines ont la loi du mouvement brownien classique.

Enfin, rappelons que le mouvement brownien à plusieurs paramètres de P. Lévy  $B$  étant un processus à accroissements stationnaires partant de 0, l'action  $T$  définie sur l'espace  $\Omega = \{(B_x)_x\}$  de ses trajectoires par  $(T_x B)_y = B_{x+y} - B_x$  est stationnaire, et la fonction  $F$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}^2$  par

$$F(B, x) = B_x$$

est un cocycle de Westman de degré 1 pour  $T$  (au sens faible a priori, c'est-à-dire avec l'équation de cocycle vérifiée pour tout  $x, y$ , p.s.  $\omega$ , et au sens fort pour la version p.s. continue, c'est-à-dire avec l'équation de cocycle vérifiée pour  $\omega$  en dehors d'un ensemble négligeable ne dépendant pas de  $x, y$ ).

**Retour sur le drap brownien** La construction analogue sur les droites affines de  $\mathbb{R}^3$  donne un cocycle de degré 2, dont les restrictions aux plans ont la loi

du drap brownien sur  $\mathbb{R}^2$ . Avant d'entrer dans les détails, revenons un instant sur le drap brownien  $(W_{s_1, s_2})_{s_1, s_2}$  de dimension 2. On a vu précédemment qu'il est défini comme étant le processus gaussien centré de covariance

$$\text{cov}(W_{s_1, s_2}, W_{t_1, t_2}) = \min(s_1, t_1) \min(s_2, t_2),$$

qui est l'aire de l'intersection des rectangles  $[0, s_1] \times [0, s_2]$  et  $[0, t_1] \times [0, t_2]$ . Ses accroissements sont usuellement définis par

$$X_{(s_1, s_2), (t_1, t_2)} = W_{t_1, t_2} + W_{s_1, s_2} - W_{t_1, s_2} - W_{s_1, t_2}.$$

Cette définition correspond à la translation des rectangles. En effet, si  $s_1 < t_1$  et  $s_2 < t_2$ , alors

$$\mathbf{1}_{[s_1, t_1] \times [s_2, t_2]} = \mathbf{1}_{[0, t_1] \times [0, t_2]} + \mathbf{1}_{[0, s_1] \times [0, s_2]} - \mathbf{1}_{[0, t_1] \times [0, s_2]} - \mathbf{1}_{[0, s_1] \times [0, t_2]}.$$

Ce processus est aussi dit « partant de 0 » puisqu'il est égal à ses accroissements depuis l'origine :

$$W_{t_1, t_2} = X_{(0, 0), (t_1, t_2)}$$

(on se fera une idée de cette notion en remarquant que pour  $(u_1, u_2)$  fixé, le processus  $W'$  défini par

$$W'_{t_1, t_2} = W_{u_1 + t_1, u_2 + t_2}$$

ne part pas de 0, car il ne se retrouve pas à partir de ses accroissements  $X' : W'_{t_1, t_2} \neq X'_{(0, 0), (t_1, t_2)}$ ).

Enfin, le drap brownien est à accroissements stationnaires, dans le sens où la loi du processus des accroissements partant d'un point fixé  $(s_1, s_2)$ , défini par

$$(u_1, u_2) \mapsto X_{(s_1, s_2), (s_1 + u_1, s_2 + u_2)}$$

ne dépend pas du point de départ  $(s_1, s_2)$ .

Ces définitions classiques ont pour notre but un inconvénient. Elles dépendent du choix des axes. Or, si  $\mathbb{R}^2$  a naturellement des axes canoniques, ce n'est plus le cas d'un plan quelconque dans  $\mathbb{R}^3$ . C'est pourquoi nous les traduisons sur les triangles orientés, de  $\mathbb{R}^2$  pour commencer.

Le drap brownien sur les triangles orientés est le processus gaussien  $(B_{xy}^{(2)})_{xy}$  centré indexé par les bipoints  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , de covariance  $\text{cov}(B_{xy}^{(2)}, B_{x'y'}^{(2)})$  égale, au signe près, à l'aire de l'intersection des triangles orientés  $\Delta$  et  $\Delta'$  de sommets  $(0, x, y)$  et de sommets  $(0, x', y')$  :

$$\text{cov}(B_{xy}^{(2)}, B_{x'y'}^{(2)}) = \pm |\Delta \cap \Delta'| \quad (17)$$

le signe étant positif si les deux triangles ont même orientation, négatif sinon. Notons  $\chi_{xyz}$  la fonction indicatrice signée du triangle orienté de sommet  $(x, y, z)$ , c'est-à-dire la fonction valant  $\pm 1$  ou 0 suivant que l'on se trouve à l'intérieur du triangle ou à l'extérieur, le signe étant positif si l'orientation du triangle est l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$ , soit si  $\det(y - x, z - x) > 0$ , négatif sinon. Un triangle n'ayant pas 0 comme sommet peut s'écrire à partir de triangles ayant 0 comme sommet, comme cela se voit sur la formule suivante :

$$\chi_{xyz} = \chi_{0xy} - \chi_{0xz} + \chi_{0yz}$$

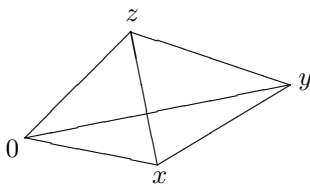


FIG. 1 – Expression d'un triangle n'ayant pas 0 comme sommet

(voir figure 1). Les accroissements du processus  $(B_{yz}^{(2)})_{yz}$  depuis un point  $x$  sont donc définis par

$$X_{xyz} = B_{xy}^{(2)} - B_{xz}^{(2)} + B_{yz}^{(2)}. \quad (18)$$

On retrouve le fait que le processus  $B$  part de 0, c'est-à-dire qu'il est égal à ses accroissements depuis 0. En effet l'égalité (17) impose que la variable aléatoire  $B_{0x}^{(2)}$  est de variance nulle, donc on a

$$B_{yz}^{(2)} = X_{0yz}. \quad (19)$$

Enfin  $B$  est à accroissements stationnaires puisque la loi de ses accroissements depuis un point  $x$  fixé :

$$(u, v) \mapsto X_{x, x+u, x+v} \quad (20)$$

ne dépend pas du point de départ  $x$ .

Enfin, ce passage aux triangles orientés permet d'écrire le drap brownien de dimension 2 comme un cocycle de Westman de degré 2 pour une action stationnaire de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, sur l'espace des trajectoires  $\Omega = \{B_{xy}^{(2)}\}$ , l'action  $T$  définie par

$$(T_x B^{(2)})_{yz} = B_{xy}^{(2)} - B_{xz}^{(2)} + B_{yz}^{(2)} \quad (21)$$

est stationnaire, et la fonction  $\alpha^{(2)}$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  par

$$\alpha^{(2)}(B^{(2)}, x, y) = B_{xy}^{(2)} \quad (22)$$

est un cocycle de degré 2 de Westman (au sens faible a priori, au sens fort pour la version p.s. continue).

#### 2.4.2 Cocycle brownien de degré 2 en dimension 3 (*Article 7*)

Revenons à nos droites aléatoires dans  $\mathbb{R}^3$ . Posons le système de coordonnées  $(r, \theta, \phi, \psi)$  pour la droite affine de  $\mathbb{R}^3$  passant par le point

$$(r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi)$$

de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , tangente à la sphère de rayon  $r$ , et faisant un angle  $\psi$  avec le méridien. La mesure uniforme, c'est-à-dire invariante par les isométries affines de  $\mathbb{R}^3$  a pour expression

$$r \cos \phi \, dr d\theta d\phi d\psi.$$

Considérons alors une suite de vecteurs aléatoires indépendants  $(\vec{X}_k)_{k \geq 1}$ , ou  $\vec{X}_k = (R_k, \Theta_k, \Phi_k \Psi_k)$  est à valeurs dans le domaine  $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , de loi  $\nu_{\vec{X}}$  la mesure invariante ci-dessus (normalisée). Soit  $(\varepsilon_n)_n$  une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, et indépendantes de la suite  $(\vec{X}_k)_k$ . Soit alors, pour un entier  $n$  fixé, le champ aléatoire  $(P_n(x, y))_{x, y}$  défini pour  $x, y$  dans la boule de  $\mathbb{R}^3$  de centre 0 et de rayon 1 par

$$P_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \tilde{\chi}_{0, x, y}(\vec{X}_k).$$

où  $\tilde{\chi}_{0, x, y}$  est maintenant au signe près l'indicatrice de l'ensemble des systèmes de coordonnées  $(r, \theta, \phi, \psi)$  correspondant à une droite affine sécante à la surface triangulaire  $\Delta$  de sommets  $(0, x, y)$ ; le signe de  $\tilde{\chi}_{0, x, y}(\vec{X})$  est celui du produit scalaire du vecteur normal orienté du triangle avec le vecteur directeur de la droite de coordonnées  $\vec{X}$ , orientée vers le haut. Pour  $n$  tendant vers l'infini, le processus  $(P_n(x, y))_{(x, y)}$  tend en loi vers un processus gaussien centré, de covariance :

$$\text{cov}\left(\varepsilon_1 \tilde{\chi}_{0xy}(\vec{X}_1), \varepsilon_1 \tilde{\chi}_{0x'y'}(\vec{X}_1)\right) = \int_{\mathcal{D}} \tilde{\chi}_{0, x, y} \tilde{\chi}_{0, x', y'} d\nu_{\vec{X}}.$$

On a calculé l'expression suivante, importante pour la suite :

$$\int_{\mathcal{D}} \tilde{\chi}_{0, x, y} \tilde{\chi}_{0, x', y'} d\nu_{\vec{X}} = \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} \int_{\partial\Delta'} \ln \|\overline{MM'}\| \langle d\vec{\ell}(M), d\vec{\ell}'(M') \rangle, \quad (23)$$

où  $d\vec{\ell}$  et  $d\vec{\ell}'$  désignent les champs infinitésimaux tangents aux bords  $\partial\Delta$  et  $\partial\Delta'$ . Lorsque les deux triangles sont coplanaires, cette expression devient, au signe près, l'aire de l'intersection des deux triangles

$$\int_{\mathcal{D}} \tilde{\chi}_{0, x, y} \tilde{\chi}_{0, x', y'} d\nu_{\vec{X}} = \pm |\Delta \cap \Delta'|$$

le signe étant positif si les triangles ont même orientation, négatif sinon. La restriction de notre processus à un plan de  $\mathbb{R}^3$  a donc la loi du drap brownien plan indexé par les triangles.

Si l'on reprend pour définir les accroissements de  $B$  la formule (18), alors notre processus part de 0 et est à accroissements stationnaires, au sens de (19) et (20). Enfin, on peut en faire un cocycle de degré 2, en reprenant sans modification les définitions (21) et (22). Ceci est dû aux faits que la formule

$$\tilde{\chi}_{xyz} = \tilde{\chi}_{0xy} - \tilde{\chi}_{0xz} + \tilde{\chi}_{0yz}$$

est valide, et que la mesure prise sur les droites affines est invariante par les translations affines.

**Cocycle de Poisson** Notons que l'on a une version poissonnienne symétrique de ce cocycle de degré 2, en considérant le processus défini pour  $x, y$  de norme  $\leq 1$  par

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \tilde{\chi}_{0, x, y}(\vec{X}_k),$$

où le nombre de termes  $N$  est une variable aléatoire de Poisson, indépendante des suites  $(X_k)_k$  et  $(\varepsilon_k)_k$ . La loi de la variable aléatoire  $Q(x, y)$  est alors une

loi de Poisson symétrisée, c'est à dire la loi d'une différence de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes de même paramètre. Enfin, pour garder des lois de Poisson strictes, on peut considérer le processus sous additif défini par

$$Q_{sa}(x, y) = \sum_{k=1}^N |\tilde{\chi}_{0,x,y}(\vec{X}_k)|.$$

Il vérifie une inégalité de degré 2 :

$$Q_{sa}(x, y) \leq Q_{sa}(x + y, z) + Q_{sa}(x, y + z) + T_x Q_{sa}(y, z)$$

où  $T$  est l'action de translation des trajectoires (en fait chacun des quatre termes est plus petit que la somme des trois autres).

Ces deux processus ont un sens particulier dans le cas discret, c'est-à-dire pour  $x, y$  à coordonnées entières. Ils constituent alors en effet une sorte de généralisation multidimensionnelle et de degré 2 de la marche aléatoire simple.

### 2.4.3 Mesure spectrale du cocycle brownien (*Article 6*)

L'égalité (23) ci-dessus montre que la fonction

$$(x, y), (x', y') \mapsto \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial\Delta(0,x,y)} \int_{\partial\Delta(0,x',y')} \ln \|\overrightarrow{MM'}\| \langle d\vec{\ell}(M), d\vec{\ell}(M') \rangle$$

est de type positif. Nous avons donné une autre démonstration de ce fait, basée sur l'analyse de Fourier. Cette démonstration consiste en fait à calculer la mesure spectrale du bruit gaussien correspondant aux accroissements du cocycle brownien de degré 2 en dimension 3. Comme ce bruit gaussien est à 3 paramètres, et à valeurs vectorielles de dimension 3, sa mesure spectrale est définie sur  $\mathbb{R}^3$ , à valeurs dans les matrices symétriques positives d'ordre 3. On a calculé comme coefficient  $dm_{ij}$ , pour  $1 \leq i, j \leq 3$  :

$$dm_{ij}(\eta) = \left( \delta_{ij} - \frac{\eta_i \eta_j}{\|\eta\|^2} \right) \frac{1}{2\|\eta\|} d\eta,$$

où  $d\eta$  est la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\delta_{ij} = 1$  ou 0 suivant que  $i = j$  ou non. La structure des mesures spectrales multidimensionnelles a été étudiée par Wong et Zakai dans [41]. Ces auteurs ont montré, par analogie avec la décomposition de Hodge-de Rham, que toute mesure spectrale d'un champ stationnaire isotropique défini sur  $\mathbb{R}^d$ , à valeurs vectorielles de dimension  $\binom{d}{k}$ , se décompose en la somme d'une mesure spectrale correspondant à une forme fermée de degré  $k$  et d'une autre correspondant à une forme fermée de degré  $d - k$ . Dans notre cas le facteur polaire  $\delta_{ij} - \frac{\eta_i \eta_j}{\|\eta\|^2}$  correspond à la composante cocycle de degré 2 (« solénoïde » dans leur vocabulaire). Cela donné, toute l'information est dans le facteur radial ( $\eta \mapsto \frac{\pi}{\|\eta\|} d\eta$  pour nous). L'interprétation de cette mesure radiale étant plus claire en coordonnées polaires, posons  $\eta = r\vec{v}$  avec  $r = \|\eta\|$  et  $\vec{v} = \eta/r$ , et notons  $d\vec{v}$  la mesure uniforme normalisée sur la sphère de rayon 1. La mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^3$  s'exprimant  $d\eta = 4\pi r^2 dr d\vec{v}$ , la partie radiale  $dm_{(s)}$  de notre mesure spectrale s'écrit

$$dm_{(s)}(\eta) = 2\pi r dr d\vec{v}.$$

Remarquons que c'est l'expression formelle de la mesure de Lebesgue dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Le bruit gaussien des accroissements du cocycle brownien de degré 2 en dimension 3 apparaît donc comme étant la **composante fermée de degré 2 (solénoïdale) du bruit blanc plan dans l'espace**. A titre de comparaison, les accroissements du mouvement brownien de Lévy, dont la mesure spectrale est

$$dm_{ij}(\eta) = 4 \frac{\eta_i \eta_j}{\|\eta\|^2} dr d\vec{v}$$

apparaissent comme étant la **composante fermée de degré 1 (potentielle) du bruit blanc linéaire dans l'espace**.

## 2.5 Une interprétation électrique du mouvement brownien à trois paramètres

Nous avons vu que la covariance du mouvement brownien à plusieurs paramètres est basée sur la fonction  $x \mapsto \|x\|$ , et celle du cocycle brownien de degré 2 sur la fonction  $x \mapsto \ln \|x\|$ . Or ces fonctions sont les fonctions de Green, respectivement en dimension 1 et 2. Cela montre que ces processus ont des liens avec l'opérateur de Laplace. Une des applications est la propriété de Markov, sur laquelle nous reviendrons. Une autre, que nous détaillons maintenant, est que le mouvement brownien à trois paramètres peut s'interpréter comme étant le potentiel électrique (nul en 0) créé par un bruit blanc gaussien de charges. Ces deux applications sont d'ailleurs liées, la seconde permettant une interprétation physique de la première, dans le cas particulier du cocycle brownien de degré 1 en dimension 3.

### 2.5.1 Cocycles généralisés à la Hida

Les trajectoires des processus browniens décrits ci-dessus ne sont pas différentiables. Il est donc naturel d'essayer de les étendre aux cocycles à valeurs dans les distributions. Une autre raison de passer aux distributions est que la définition de cocycle de J.K.O. fait déjà référence aux distributions. Nous considérerons des distributions définies sur un espace de probabilité, avec des lois invariantes par translation des trajectoires. Enfin nous nous limiterons au cas gaussien, puisque nous avons en vue l'application à nos cocycles browniens. La théorie est encore assez lourde dans ce cadre (voir Hida [14]), mais quelques énoncés de base permettent déjà de faire les calculs dont nous avons besoin.

**Définition 8.** Soit  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  un espace probabilisé. Une distribution aléatoire sur  $\Omega$ , d'intégrabilité  $L^2$ , à  $n$  variables, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est une application linéaire continue

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ \phi &\mapsto \langle T, \phi \rangle \end{aligned}$$

de l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  des fonctions de classes  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact de  $\mathbb{R}^n$ , dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . Une distribution  $T$  est de loi gaussienne centrée si il existe une forme bilinéaire continue symétrique positive  $K_T$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\mathbf{E}(e^{i\langle T, \phi \rangle}) = e^{-\frac{1}{2}K_T(\phi, \phi)}.$$

Notons qu'une distribution gaussienne centrée est caractérisée par sa covariance  $K_T$ .

L'exemple de la dérivation du mouvement brownien est caractéristique. En effet, les trajectoires de ce processus étant des fonctions continues, elle définissent une distribution aléatoire  $T$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour toute fonction  $\phi$  à support compact dans  $]0, +\infty[$ , on pose

$$\langle T, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(t) B_t dt.$$

La covariance  $K_T$  est

$$\begin{aligned} K_T(\phi, \psi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi(t)\psi(s) \text{cov}(B_t, B_s) dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi(t)\psi(s) \min(s, t) dt ds. \end{aligned}$$

Calculons maintenant sa dérivée  $T'$ . Suivant la théorie des distributions, cette distribution est définie par  $\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$ . Sa covariance  $K_{T'}$  est donc

$$\begin{aligned} K_{T'}(\phi, \psi) &= K_T(-\phi', -\psi') \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi'(t)\psi'(s) \min(s, t) dt ds. \end{aligned} \quad (24)$$

L'intégrale en  $t$  se calcule en deux morceaux, de 0 à  $s$  puis de  $s$  à l'infini. On obtient

$$\int_0^{+\infty} \phi'(t) \min(s, t) dt = \Phi(0) - \Phi(s)$$

où  $\Phi$  est une primitive de  $\phi$ . Puis l'intégrale en  $s$  se calcule par parties. Finalement on obtient

$$K_{T'}(\phi, \psi) = \int_0^{+\infty} \phi(s)\psi(s) ds; \quad (25)$$

$T'$  est donc le bruit blanc sur  $\mathbb{R}_+$ .

Notons que la covariance  $K_{T'}$  est invariante par la translation des fonctions. On retrouve ainsi que le mouvement brownien est à accroissements stationnaires.

Le calcul de dérivée ci-dessus peut aussi se faire formellement très rapidement, si l'on utilise les formules de dérivation classiques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(|s| ds) &= (\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(s)) ds \\ \frac{\partial}{\partial s} \left( ((\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(s)) ds) \right) &= 2\delta_0(ds) \end{aligned}$$

où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac en 0. Comme on a  $\min(s, t) = \frac{1}{2}(|s| + |t| - |s - t|)$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} (\min(s, t) ds dt) = \delta_{\{s\}}(dt) ds,$$

qui est la mesure uniforme sur la diagonale  $s = t$ . La formule (24) donne donc, après une double intégration par parties

$$K_T(-\phi', -\psi') = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi(t)\psi(s) \delta_{\{s\}}(dt) ds,$$

ce qui est bien le résultat (25) attendu.

### 2.5.2 Laplacien du mouvement brownien à trois paramètres

Considérons la distribution  $T$  à trois variables que constitue le mouvement brownien à trois paramètres. Sa covariance est donnée par

$$K_T(\phi, \psi) = \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{y \in \mathbb{R}^3} \phi(x)\psi(y) \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\| - \|x - y\|) dx dy.$$

Le laplacien de la distribution  $T$  étant défini par  $\langle \Delta T, \phi \rangle = \langle T, \Delta \phi \rangle$ , sa covariance  $K_{\Delta T}$  est

$$K_{\Delta T}(\phi, \psi) = \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{y \in \mathbb{R}^3} \Delta \phi(x) \Delta \psi(y) \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\| - \|x - y\|) dx dy. \quad (26)$$

Un calcul similaire à celui fait dans le cas du mouvement brownien donne

$$K_{\Delta T}(\phi, \psi) = 4\pi \int_{x \in \mathbb{R}^3} \phi(x)\psi(x) dx. \quad (27)$$

Le calcul formel se fait grâce aux formules

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{2}\|x\| dx\right) &= \frac{1}{\|x\|} dx \\ \Delta\left(\frac{1}{\|x\|} dx\right) &= -4\pi\delta_0(dx), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\Delta_x \Delta_y \left( \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\| - \|x - y\|) dx dy \right) = 4\pi \delta_{\{x\}}(dy) dx.$$

C'est bien le résultat (27) attendu. Donc la distribution aléatoire  $\Delta T$  est bien le bruit blanc de  $\mathbb{R}^3$ , au facteur  $\sqrt{4\pi}$  près.

Or le potentiel  $V$  créé par une densité  $\rho$  de charges électriques est donné par l'équation  $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$ , ( $\varepsilon_0$  = perméabilité électrique). Le mouvement brownien à trois paramètres peut donc s'interpréter comme étant le potentiel créé par un bruit blanc de charges électriques (multiplié par  $-\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$ ).

Ce résultat permet de donner une interprétation de la propriété de Markov démontrée par McKean dans [33]. En effet, un résultat classique d'électrostatique dit que, connaissant le potentiel  $V$  et le champ électrique  $\vec{E} = \text{grad}V$  sur le bord<sup>3</sup> d'un domaine borné  $D$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , le potentiel à l'intérieur de  $D$  (resp. à l'extérieur) ne dépend que des charges à l'intérieur de  $D$  (resp. à l'extérieur). On vient de voir que dans le cas où  $V$  est le mouvement brownien à trois paramètres de Lévy, les charges à l'intérieur et à l'extérieur de  $D$  sont indépendantes. Donc le potentiel  $V$  à l'intérieur et celui à l'extérieur de  $D$  sont indépendants, conditionnellement à  $V$  et  $\vec{E} = \text{grad}V$  sur le bord d'un domaine  $D$ . C'est exactement sous cette forme que McKean a démontré sa propriété de Markov.

## 2.6 Propriété de Markov d'un cocycle-potentiel de degré 2

Comment définir la propriété de Markov pour un cocycle de degré 2? Comme il y a plusieurs notions de cocycles de degré 2, il y a sans doute plusieurs réponses

<sup>3</sup>il faut connaître  $\vec{E} = \text{grad}V$  sur le bord lorsqu'il peut y avoir des charges sur ce bord



à cette question. La situation la plus naturelle est celle d'un cocycle-potentiel  $\vec{g}$ . La propriété de Markov peut dans ce cas être définie par analogie avec la définition donnée par McKean pour le mouvement brownien à plusieurs paramètres. On note  $\mathcal{B}_{r,R}$  la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires  $\{\vec{g}(\cdot, x), r \leq \|x\| \leq R\}$ .

**Définition 9.** Un potentiel-cocycle  $\vec{g}$  de degré 2 est markovien si pour tout réel  $r > 0$ , pour tout point  $y \in \mathbb{R}^3$  de norme  $> r$ , la loi de  $\vec{g}(\cdot, y)$  conditionnellement à la tribu du passé  $\mathcal{B}_- = \bigcap_n \mathcal{B}_{0, r+1/n}$  est mesurable par rapport à la tribu du présent  $\partial\mathcal{B} = \bigcap_n \mathcal{B}_{r, r+1/n}$  : pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$ , si  $\|y\| > r$ , alors

$$\mathbf{E}\left(\phi(g(\cdot, y)) \mid \mathcal{B}_-\right) = \mathbf{E}\left(\phi(g(\cdot, y)) \mid \partial\mathcal{B}\right).$$

Cette définition appelle trois remarques :

1. Pour un vecteur gaussien, la loi conditionnelle d'une coordonnée sachant les autres est une loi de Gauss de moyenne l'espérance conditionnelle, et de variance une constante. Il suffit donc de regarder les espérances conditionnelles (sans fonction test  $\phi$ ) pour connaître les lois conditionnelles.
2. Cette définition se généralise en remplaçant les boules par des domaines compacts de classes  $\mathcal{C}^\infty$  ;
3. Les tribus de conditionnement contenant les *dérivées* du champ aléatoire  $\vec{g}$  à tous les ordres sur le bord de la boule, on a en fait une propriété de Markov d'ordre infini. On peut aussi définir une propriété de Markov d'ordre  $\ell$  entier  $\geq 0$  donné. Elle consiste heuristiquement à conditionner par les dérivées jusqu'à l'ordre  $\ell$  (Voir McKean [33]).

Le problème, pour appliquer cette définition au cocycle brownien de degré 2, est que ce dernier n'est pas associé à un cocycle-potentiel, puisqu'il ne vérifie pas la condition (14) page 20. On peut cependant construire une distribution aléatoire  $T_{\vec{g}}$  jouant pour le cocycle brownien de degré 2 le rôle de cocycle-potentiel. On peut alors donner un sens à la définition ci-dessus (voir Wong et Zakai [40]). S'inspirant de la démonstration de McKean, ces auteurs montrent que cette propriété de Markov est liée à l'existence d'un entier  $m \geq 0$  tel que, pour  $x$  de norme  $< r$  fixé, les coefficients  $\gamma_{ij}$  de la matrice covariance à  $x$  fixé

$$c_x(y) = \text{cov}(\vec{g}(\cdot, x), \vec{g}(\cdot, y))$$

vérifient  $\Delta^m \gamma_{ij}(y) = 0$  sur le domaine  $\|y\| > r$ . Dans un travail en cours, nous démontrons que cette équation, et donc la propriété de Markov, sont vérifiées par le cocycle brownien de degré 2 présenté ci-dessus, en dimension paire. Rappelons que pour le cocycle brownien de degré 1, c'est-à-dire pour le mouvement brownien de Lévy, McKean a observé la condition de parité inverse sur la dimension (soit  $d$  impaire), et que l'ordre est  $\ell = (d-1)/2$  (voir [33]). Notre étude du cas du degré 2 nous amène à penser que pour le degré général  $k$  en dimension  $d$ , la condition pour avoir la propriété de Markov est la parité du codegré  $d-k$ , et que l'ordre est  $\ell = (d-k)/2$  (le cas  $d=k$  correspondant au drap brownien usuel de  $\mathbb{R}^d$ ).

### 3 Cocycles de degré 2 d'actions de $\mathbb{Z}^3$ , exemples et applications

Le cas discret est plus clair que le cas continu du point de vue algébrique. D'autre part un certain nombre de résultats vus dans le cas continu, comme le théorème ergodique et son application au réseau électrique, ont un analogue en discret.

#### 3.1 Équivalence cohomologique des notions de Katok et Westman (*Article 5*)

Nous avons montré l'équivalence des notions de cocycle de Katok (définition 2) et de Westman (définition 1), du point de vue des classes de cohomologie. Comme application, nous avons montré que la trivialité des cocycles mesurables de degré  $\geq 2$ , mise en évidence par Feldman et Moore, ne passe pas à la cohomologie intégrable. Cela est détaillé maintenant.

##### 3.1.1 Formules de passage

Explicitons les formules de passage entre cocycles de Westman et de Katok. On se limite ici au cas du degré 2 d'une action de  $\mathbb{Z}^3$ , pour la clarté de l'exposé, mais ces formules se généralisent à tous les degrés et en toute dimension. Nous avons vu que dans le cas continu, un cocycle de J.K.O. engendre un cocycle de Westman par intégration sur les simplexes. Cette construction peut être adaptée au cas discret. On considère le réseau dual, c'est-à-dire le réseau décalé  $\bar{e}^* + \mathbb{Z}^3$  d'un vecteur  $\bar{e}^* \in ]0, 1[^3$ . L'usage est de prendre les coordonnées de  $\bar{e}^*$  toutes égales à  $1/2$ . Bien que ce ne soit pas une nécessité absolue, nous prendrons plutôt ici des coordonnées irrationnelles, et irrationnelles entre elles, car cela simplifie certaines définitions. À un cocycle de Katok  $\vec{f} = (f_{23}, f_{31}, f_{12})$  on associe le cocycle de Westman  $\alpha = i(f)$  représentant son flux à travers les triangles, définie par

$$\alpha(\omega, x, y) = \sum_{(i,j,k)} \sum_z \varepsilon_i f_{ijk}(T_z \omega) \quad (28)$$

la première somme portant sur les permutations cycliques  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ , la seconde sur les sommets  $z$  tels que le segment  $[z + \bar{e}^* - \bar{e}_i, z + \bar{e}^*]$  traverse le triangle de sommets  $(0, x, y)$ ; le signe  $\varepsilon_i$  est celui du déterminant  $\det(x, y, \bar{e}_i)$ . Réciproquement, à un cocycle de Westman, on associe le vecteur  $f = p(\alpha)$  dont les coordonnées sont

$$f_{ij}(\omega) = \alpha(\omega, e_i, e_i + e_j) - \alpha(\omega, e_j, e_i + e_j) \quad (29)$$

$(i, j) = (1, 2), (2, 3)$  ou  $(3, 1)$ . Remarquons que la somme algébrique des triangles orientés

$$\Delta(0, e_i, e_i + e_j) - \Delta(0, e_j, e_i + e_j)$$

représente la facette carrée orientée de premier sommet  $O$  et de normale  $\bar{e}_k$ . Le théorème 1 page 9 peut être complété de la façon suivante

**Théorème 1 (degré 2 dimension 3)** *Les notions de cocycle et de cobord de degré 2 de Westman et Katok, pour une action de  $\mathbb{Z}^3$ , se correspondent au sens suivant :*

- Soit  $\vec{f} = (f_{23}, f_{31}, f_{12})$  un vecteur aléatoire. Alors  $\vec{f}$  est un cocycle (resp. un cobord) de degré 2 de Katok si et seulement si  $i(\vec{f})$  est un cocycle (resp. un cobord) de degré 2 de Westman.
- Soit  $\alpha$  une fonction aléatoire mesurable définie sur  $\Omega \times \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ . Alors c'est un cocycle (resp. un cobord) de degré 2 de Westman si et seulement si  $p(\alpha)$  est un cocycle (resp. un cobord) de degré 2 de Katok.
- Enfin, pour tout cocycle de Katok  $\vec{f}$  de degré 2 on a  $p \circ i(\vec{f}) = \vec{f}$ , et pour tout cocycle de Westman  $\alpha$  de degré 2 on a  $i \circ p(\alpha) - \alpha$  est un cobord.

Ce théorème signifie que les applications  $i$  et  $p$  se factorisent sur les classes de cohomologie en deux applications bijectives, réciproques l'une de l'autre. Les définitions des applications  $i$  et  $p$  passent à tous les degrés  $k$  et toutes les dimensions  $d$ , avec  $k \leq d$ . Le cas  $k \geq d + 1$  est crucial. En effet, comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, la notion de cocycle de Katok n'existe pas dans ce cas, mais celle de Westman a un sens. Le théorème ci-dessus a une version dans ce cas :

**Théorème (Cartan et Eilenberg).** *Tout cocycle de Westman de degré  $k$  d'une action de  $\mathbb{Z}^d$  avec  $k \geq d + 1$  est un cobord.*

Dans ces deux théorèmes, les « cochaînes » de transferts sont obtenues par des formules algébriques, c'est-à-dire sous forme de sommes finies, comme c'est d'ailleurs le cas pour les applications  $i$  et  $p$  définies par les formules (28) et (29) ci-dessus. Ces résultats sont donc valides sur tout espace de fonctions, notamment sur l'espace des fonctions mesurables sur  $\Omega$ , les espaces de Lebesgue  $L^p$  ou de Lorentz  $L_{p,q}$ , comme sur l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  lorsque  $\Omega$  est une variété différentiable. Enfin, ces théorèmes sont liés à la structure du groupe, et sont indépendants de l'action, qui peut avoir un facteur périodique ou non, peut être libre ou non, ergodique ou non...

Un cas particulier du théorème de Cartan et Eilenberg est celui de la dimension  $d = 1$  ; seuls les cocycles de degré 1 peuvent ne pas être des cobords. Dans ce cas, la démonstration est beaucoup plus simple, et s'étend à tout groupe libre dénombrable. On la trouve par exemple, sous sa présentation algébrique, dans Mac Lane [30], son application à la théorie ergodique ayant été traitée par Westman.

**Théorème (Mac Lane, Westman).** *Tout cocycle de Westman de degré  $k \geq 2$  d'une action d'un groupe dénombrable libre est un cobord.*

Le théorème 1 permet de faire passer un résultat du formalisme de Katok à celui de Westman, ou réciproquement. Nous donnons quelques applications.

### 3.1.2 De Westman à Katok : la trivialité de la cohomologie mesurable de degré $\geq 2$

Le résultat de Feldman et Moore sur la trivialité des cocycles mesurables de degré  $\geq 2$  est une application du résultat de Westman ci-dessus et du théorème de Dye (voir [7]). Ces auteurs démontrent que du point de vu de la mesurabilité, et lorsque l'action est libre, les notions de cocycle et cobord sont invariantes par isomorphisme orbital. Le théorème de Dye permet alors de se ramener au cas  $d = 1$  :

**Théorème (Feldman et Moore).** *Tout cocycle mesurable de Westman de degré  $k \geq 2$  d'une action libre de  $\mathbb{Z}^d$  est un cobord mesurable.*

Notons que le résultat de Westman est, comme celui de Cartan et Eilenberg, vrai pour tout espace de fonctions. Dans le cas du théorème de Feldman et Moore c'est l'application de l'isomorphisme orbital donné par le théorème de Dye qui nécessite une action libre, et fait perdre l'intégrabilité.

La version pour cocycle de Katok de degré  $k = d$  a été démontrée par Lind (voir [27]). Le théorème 1 permet d'en donner une autre démonstration, comme conséquence directe du théorème de Feldman et Moore :

**Théorème (Lind).** *Soient  $T_1, T_2$  des automorphismes stationnaires commutant sur un espace de probabilité, engendrant une action libre de  $\mathbb{Z}^2$ . Pour toute fonction mesurable  $f$  il existe une famille  $(g_1, g_2)$  de fonctions mesurables telle que*

$$f = g_1 \circ T_1 - g_1 + g_2 \circ T_2 - g_2.$$

### 3.1.3 De Katok à Westman : non trivialité de la cohomologie intégrable ou différentiable

Le théorème de Lind n'est plus vrai si l'on impose aux fonctions des conditions d'intégrabilités,  $L^2$  par exemple. Nous avons trouvé des exemples :

**Lemme 1.** *Il existe  $T_1, T_2$  des automorphismes stationnaires commutant sur un espace de probabilité, engendrant une action libre de  $\mathbb{Z}^2$ , et une variable aléatoire  $f \in L^2$  tels qu'il n'existe pas de vecteur aléatoire  $\vec{g} = (g_1, g_2)$  d'intégrabilité  $L^2$  vérifiant*

$$f = (g_1 \circ T_2 - g_1) + (g_2 \circ T_1 - g_2).$$

*On peut de plus choisir  $f$  d'espérance nulle.*

*Schéma de démonstration du lemme.*— On prend pour  $\Omega$  le cercle unité, et pour les transformations des rotations irrationnelles. On utilise ensuite un lemme d'approximation simultanée des angles des rotations par des rationnels, pour construire la suite des coefficients de Fourier de la fonctions  $f$ .  $\square$

Ceci montre que le théorème de Feldman et Moore ne passe pas à la cohomologie intégrable. Par exemple, au degré 2 en dimension 2 :

**Proposition 6.** *Il existe  $T_1, T_2$  des automorphismes stationnaires commutant sur un espace de probabilité, engendrant une action libre de  $\mathbb{Z}^2$ , et un cocycle de Westman  $\alpha$  de degré 2, d'intégrabilité  $L^2$ , tel que le système d'équations « pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}^3$*

$$\alpha(\omega, x, y) - (\beta(\omega, x) - \beta(\omega, x + y) + \beta(T_x \omega, y)) \text{ est constant en } \omega \gg$$

*n'ait pas de solution  $\beta$  d'intégrabilité  $L^2$ .*

C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du lemme ci-dessus.

Enfin, les résultats de Katok et Katok sur la cohomologie de classe  $\mathcal{C}^\infty$  des actions hyperboliques de  $\mathbb{Z}^d$  passent aussi au formalisme de Westman. Nous donnons par exemple l'énoncé dans le cas  $k = d = 2$  :

**Corollaire 4.** *Soit  $T$  une action de  $\mathbb{Z}^2$  par automorphismes hyperboliques sur  $\Omega = \mathbb{T}^N$ . Soit  $\alpha$  un cocycle de Westman de degré 2 pour  $T$ , de classe  $C^\infty$  en  $\omega \in \Omega$ . Soit la fonction*

$$f_{12}(\omega) = \alpha(\omega, e_1, e_1 + e_2) - \alpha(\omega, e_2, e_1 + e_2).$$

*Si la moyenne de  $f_{12}$  sur toute orbite finie est nulle, alors  $\alpha$  est un cobord, c'est-à-dire : il existe une fonction  $\beta$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{Z}^2$ , de classe  $C^\infty$  en  $\omega \in \Omega$ , telle que*

$$\alpha(\omega, x, y) = \beta(\omega, x) - \beta(\omega, x + y) + \beta(T_x \omega, y).$$

Nous donnons aussi l'énoncé dans le cas de degré 2 en dimension 3 :

**Corollaire 5.** *Soit  $T$  une action de  $\mathbb{Z}^3$  par automorphismes hyperboliques sur  $\Omega = \mathbb{T}^N$ . Soit  $\alpha$  un cocycle de Westman de degré 2 pour  $T$ , de classe  $C^\infty$  en  $\omega \in \Omega$ . Alors  $\alpha$  est cohomologue à un cocycle constant en  $\omega$  : il existe une fonction  $\beta$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{Z}^2$ , de classe  $C^\infty$  en  $\omega \in \Omega$ , telle que*

$$\alpha(\omega, x, y) - (\beta(\omega, x) - \beta(\omega, x + y) + \beta(T_x \omega, y)).$$

*ne dépende pas de  $\omega$ .*

### 3.2 Théorème ergodique (*Article 3*)

Nous passons rapidement sur ce paragraphe et le suivant, dont les résultats ressemblent comme deux gouttes d'eau au cas continu (quoique les démonstrations soient plus spécifiques). Le théorème ergodique s'énonce :

**Théorème 5.** *Soit un système dynamique probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, (T_x)_{x \in \mathbb{R}^3})$  ergodique. Soit  $\vec{f}$  un cocycle de Katok de degré 2 de puissance  $p$ -ème intégrable, avec  $p \geq 1$ . Soit  $\theta > 0$ . Pour tout triangle orienté  $\Delta$ , considérons la quantité*

$$\mathcal{M}(\omega, \Delta) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{(i,j,k)} \sum_z \varepsilon_i f_{jk}(T_z \omega)$$

*la première somme portant sur les permutations cycliques  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ , la seconde sur les sommets  $z$  tels que le segment  $[z + \vec{e}^* - \vec{e}_i, z + \vec{e}^*]$  traverse le triangle  $\Delta$  ; le signe  $\varepsilon_i$  est celui du déterminant  $\det(x, y, \vec{e}_i)$ . Notons  $\vec{n}_\Delta$  le vecteur normal orienté d'un triangle orienté  $\Delta$ . Alors*

- *la quantité ci-dessus converge en moyenne  $L^p$  vers  $\langle \mathbf{E}(\vec{f}), \vec{n}_\Delta \rangle$ , uniformément sur l'ensemble des triangles  $\Delta$  admettant  $O$  comme premier sommet et dont les trois angles sont  $\geq \theta$ , lorsque l'aire  $|\Delta|$  tend vers l'infini ;*
- *si de plus  $\vec{f}$  est de norme de Lorentz  $L_{2,1}$  finie, la convergence a lieu ponctuellement.*

Notons que ce théorème (comme sa version continue théorème 2 page 13) est vrai pour toutes les dimensions  $d$  et tous les degrés  $k$ , et que la condition d'intégrabilité pour la convergence ponctuelle est alors la finitude de la norme de Lorentz  $L_{d-k+1,1}$ . Enfin une version sous-additive a été démontrée par Boivin dans [2].

### 3.3 Flux, résistivité (*Article 4*)

Là encore, les énoncés ressemblent beaucoup à ceux du cas continu, bien que les passages délicats dans les démonstrations ne soient pas les mêmes. On décrit simplement la situation.

Considérons trois fonctions  $R_i$  positives,  $i = 1, 2, 3$ , définies sur un espace probabilisé muni d'une action stationnaires de  $\mathbb{Z}^3$ . On considère le réseau électrique aléatoire tel que chaque arête  $[x, x + \vec{e}_i]$  du réseau défini par  $\mathbb{Z}^3$  ait une résistance électrique  $R_i(T_x\omega)$ . On se place dans le cas elliptique, c'est-à-dire que l'on suppose qu'il existe deux constantes  $0 < c < C$  telles que les trois fonctions  $R_i$  prennent leurs valeurs entre  $c$  et  $C$ . Supposons de plus que le système dynamique sur lequel sont définies ces fonctions est ergodique. On se fixe l'espérance  $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$  du flux du courant dans le milieu. Si l'on cherche un courant stationnaire, ce dernier est donné par un cocycle de Katok  $\vec{f}$  de degré 2 (loi de conservation du courant). La puissance  $P(T_x\omega)$  dissipée dans les trois arêtes partant positivement d'un sommet  $x$  est donnée par la formule d'Ohm :  $P(T_x\omega) = \sum_{(i,j,k)} (R_i f_{jk}^2)(T_x\omega)$  (selon la loi « la puissance est égale à la résistance que multiplie le carré de l'intensité de courant »). L'accroissement du potentiel le long de l'arête  $[x, x + \vec{e}_i]$  est  $u_i(T_x\omega) = R_i(T_x\omega) f_{jk}(T_x\omega)$ . On admet que l'électricité parcourt le milieu de manière à ce que l'espérance de la puissance  $P$  soit minimale. On vérifie aisément, par une méthode de projection orthogonale type Lax-Milgram, que le système vérifié par  $\vec{f}$  s'écrit

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \int_{\Omega} \vec{f} d\mu &= \vec{I} \\ \delta_i u_j &= \delta_j u_i \quad (\text{où } \delta_i = T_i - I) \\ \sum \delta_i f_{jk} &= 0 \end{cases}$$

Remarquons que le vecteur aléatoire  $\vec{u}$  représentant l'accroissement du potentiel forme alors un cocycle de Katok de degré 1. Le cocycle de Westman associé donne le potentiel nul en 0. L'existence d'une unique solution au système  $(\mathcal{S})$  dans  $L^2(\Omega)$  est démontrée par Kunnemann (voir [25]). Pour pouvoir appliquer le théorème ergodique ponctuel pour cocycles de Katok de degré 2 au vecteur aléatoire  $\vec{f}$ , il faut vérifier que ce dernier a l'intégrabilité  $L_{2,1}$ . C'est ce que nous avons démontré :

**Théorème 6.** *Il existe un  $q > 2$  tel que la solution du système ci-dessus soit dans  $L^q(\Omega)$ .*

On peut en déduire la convergence ponctuelle du flux moyen, puis celle de la résistivité vers le tenseur de résistivité  $\mathcal{R}_0$ , à la manière de ce qui a été vu dans le cas continu. La matrice  $\mathcal{R}_0$  est toujours définie par

$$\mathbf{E}(P) = \langle \vec{I}, \mathcal{R}_0 \vec{I} \rangle.$$

### 3.4 Résistivité par extraction d'une cellule (*Article 1*)

Il y a une autre façon de définir la résistivité d'un réseau, qui correspond mieux à la méthode usuelle de mesure employée en physique : on extrait d'un réseau une grande boîte cubique  $[0, N]^3$ , dont on soumet deux faces opposées à une différence de potentiel  $V \equiv 1$  (par exemple la face inférieure, d'équation  $x_3 = 0$  et la face supérieure, d'équation  $x_3 = N$ ). Soit  $I_N$  l'intensité du courant

traversant la boîte. Alors, d'après la loi d'Ohm, la résistance équivalente de la boîte entre les deux faces est  $\rho_N = V/I_N$ , et sa résistivité est

$$\frac{N^2}{N} \frac{V}{I_N} = N \frac{V}{I_N}$$

Répondant à une question de Kesten, nous avons montré la convergence ponctuelle de cette résistivité, vers la résistance équivalente  $\rho_\infty$  d'une boîte de côté 1 extraite du milieu conducteur continu de tenseur de résistivité  $\mathcal{R}_0$ , entre ses faces inférieure et supérieure. Cette résistance s'exprime en fonction du potentiel  $v$  dans la boîte par

$$\rho_\infty = \frac{\int_{[0,1]^3} \langle \text{grad}v, \mathcal{R}_0^{-1} \text{grad}v \rangle}{\left( \int_{[0,1]^3} \langle \vec{e}_3, \mathcal{R}_0^{-1} \text{grad}v \rangle \right)^2}$$

où  $v$  est la solution  $\mathcal{H}^1$  de l'équation aux dérivées partielles elliptique du second ordre

$$\text{div} \mathcal{R}_0^{-1} \text{grad}v = 0$$

avec conditions mixtes aux bords, de Dirichlet sur les faces inférieure et supérieure

$$\begin{aligned} v &= 0 \text{ sur la face d'équation } x_3 = 0, \\ v &= 1 \text{ sur la face d'équation } x_3 = 1 \end{aligned}$$

et de Neumann sur les faces verticales :  $\langle \vec{n}, \mathcal{R}_0^{-1} \text{grad}v \rangle = 0$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal sortant.

**Théorème 7.** *Sous les hypothèses d'ergodicité et d'ellipticité présentées dans le paragraphe précédent, on a la convergence ponctuelle*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N \frac{V}{I_N} = \rho_\infty.$$

Nous avons deux démonstrations de ce résultat. L'une, restée à l'état de prépublication, s'inspire de la démonstration faite par J.K.O. dans le cas continu. L'autre, en collaboration avec Boivin, repose sur la convergence ponctuelle des valeurs propres et des fonctions propres du laplacien associé au réseau. Remarquons que dans le cas où le tenseur limite  $\mathcal{R}_0$  est isotrope, c'est-à-dire colinéaire à la matrice identité  $Id$ , le potentiel  $v$  a l'expression évidente :

$$v(x_1, x_2, x_3) = x_3,$$

et le tenseur de résistivité s'identifie avec la résistance équivalente de la boîte de côté 1 entre ses faces inférieure et supérieure, par  $\mathcal{R}_0 = \rho_\infty Id$ . Sinon, cette identification n'est valide que si l'orientation du milieu est telle que la direction verticale soit un axe principal du tenseur de résistivité  $\mathcal{R}_0$ .

## 4 Cocycles de degré 1 d'actions de $\mathbb{Z}^d$ et flot spécial

Comme on l'a vu dans l'introduction, dans le cas du cocycle de degré 1 d'action de  $\mathbb{Z}^d$ , les définitions de Westman et de Katok sont équivalentes. Cette

notion de cocycle joue un rôle dans la construction ou la représentation des flots (c'est-à-dire des actions mesurables stationnaires de  $\mathbb{R}^d$ ). Cette construction est bien connue en dimension 1 sous le nom de « flot spécial ». Katok l'a généralisé dans [16] à la dimension  $d$ , pour un cocycle intégrable et vérifiant le théorème ergodique ponctuel (on rappelle que Boivin et Derriennic ont montré que la condition d'intégrabilité dans le théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 1 d'action de  $\mathbb{Z}^d$  est l'intégrabilité de Lorentz  $L_{d,1}$ ). Dans le même article, Katok a ensuite généralisé le théorème d'Anbrose-Kakutani, selon lequel toute action libre stationnaire ergodique de  $\mathbb{R}$  peut se représenter comme un flot spécial sous une fonction bornée. Notons que le cocycle qu'obtient Katok

$$\alpha : \Omega \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

et qui remplace la fonction plafond en dimension  $\geq 2$ , est borné en  $\omega \in \Omega$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Il vérifie donc le théorème ergodique ponctuel, et la construction du flot spécial donnée par Katok peut s'appliquer.

Nous nous sommes intéressé à la construction du flot spécial sous un cocycle donné, ne vérifiant pas nécessairement le théorème ergodique ponctuel.

#### 4.1 Dimension 1

Rappelons la situation en dimension 1. Soit un automorphisme  $T$  d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mu)$ . On suppose  $T$  ergodique. Soit une fonction  $f \in L^1(\Omega)$ . La présentation la plus rapide du flot spécial « sous » la fonction  $f$  passe par le produit semi-direct. On note  $\alpha$  le cocycle de Westman de degré 1 engendré par la fonction  $f$ , par la formule (4) de l'introduction. Le produit semi-direct associé au cocycle  $\alpha$  est le système dynamique constitué de l'espace  $\Omega \times \mathbb{R}$ , muni de la mesure infinie  $\mu = \mu \otimes \lambda$  produit de la probabilité  $\mu$  par la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ , et de l'action  $S$  de  $\mathbb{Z}$  définie par

$$S^k(\omega, t) = (T^k\omega, t + \alpha(\omega, k))$$

Cette action  $S$  commute avec le flot vertical  $V$  défini par

$$V_s(\omega, t) = (\omega, t + s);$$

Ce dernier se factorise donc en une action  $\hat{S}$  de  $\mathbb{R}$  sur l'espace  $\hat{\Omega}$  des orbites de  $S$ . Le problème réside dans la définition d'une mesure invariante, les mesures infinies ne se « projetant » pas. Il faut donc disposer d'un domaine fondamental  $D$  de l'action de  $S$ , c'est-à-dire d'un domaine mesurable contenant un point par orbite. La restriction de la mesure  $\mu$  à  $D$  donne alors une mesure invariante sur  $\hat{\Omega}$ . Le domaine  $D$  devant vérifier

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} S^k D &= \Omega \times \mathbb{R}; \\ S^k D \cap S^\ell D &= \emptyset \quad \text{pour tous } k \neq \ell, \end{aligned}$$

son existence est équivalente au fait que l'action  $S$  soit totalement dissipative. Schmidt a montré que c'était le cas ssi le cocycle  $\alpha$  était transient, c'est-à-dire si on a la convergence ponctuelle

$$\liminf_{|k| \rightarrow +\infty} |\alpha(\omega, k)| = +\infty \quad \text{p.s. } \omega$$



(voir [36]). Dans le cas d'une fonction  $f$  intégrable, cette condition est équivalente au fait que  $\int f d\mu \neq 0$ , d'après le théorème ergodique ponctuel de Birkoff.

La construction explicite d'un domaine fondamental  $D$  est assez laborieuse en général, mais très simple dans le cas d'une fonction  $f \geq 0$ . On peut en effet prendre

$$D = \{(\omega, t); -f(\omega) < t < 0\}.$$

Si l'on note  $\hat{\mu}$  la mesure sur l'espace des  $S$ -orbites  $\hat{\Omega}$  obtenue à partir de la restriction de  $\mu$  à  $D$ , on voit que sa masse totale est

$$\hat{\mu}(\hat{\Omega}) = \int_{\Omega} f d\mu. \quad (30)$$

Il est intéressant de noter que cette formule peut être démontrée même si  $f$  n'est pas positive, c'est-à-dire sans faire la construction du domaine  $D$ . En effet, Koercgin a montré dans [23] qu'une fonction  $f$  d'intégrale positive est cohomologue à une fonction positive, c'est-à-dire peut s'écrire sous la forme  $f = g + \phi \circ T - \phi$ , avec  $g \geq 0$  et  $\phi$  mesurable. De plus  $f$  et  $g$  ont même intégrale. Enfin, les produits semi-directs associés à  $f$  et  $g$  sont métriquement isomorphes, par l'isomorphisme

$$(\omega, t) \mapsto (\omega, t + \phi(\omega)).$$

La formule (30), qui s'applique à la fonction positive  $g$ , passe donc bien à la fonction  $f$ , sous la condition  $\int_{\Omega} f d\mu > 0$  (si on a  $\int_{\Omega} f d\mu < 0$ , la masse totale est la valeur absolue de cette quantité).

## 4.2 Dimension $d$ (*Article 2*)

Soit  $T$  une action stationnaire ergodique de  $\mathbb{Z}^d$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mu)$ . Soit  $\vec{f}$  un cocycle de Katok de degré 1 pour  $T$  (voir définition 2), mais à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ . Celui-ci est donc la donnée de  $d$  fonctions intégrables  $(f_i)_{1 \leq i \leq d}$ , chacune à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , vérifiant

$$\delta_i \vec{f}_j = \delta_j \vec{f}_i.$$

Soit enfin  $\vec{\alpha}$  le cocycle de Westman de degré 1, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , associé par la formule (2).

La construction du flot spécial sous le cocycle  $\vec{f}$ , décrite dans [16] suit la même démarche qu'en dimension 1. Le produit semi-direct défini sur  $\Omega \times \mathbb{R}^d$  par

$$S_x(\omega, \vec{t}) = (T_x \omega, \vec{t} + \vec{\alpha}(\omega, x))$$

commute avec le flot vertical  $(V_{\vec{s}})_{\vec{s} \in \mathbb{R}^d}$ , et la construction d'un domaine fondamental pour les  $S$ -orbites n'est possible que si  $S$  est totalement dissipative. A nouveau, le résultat de Schmidt restant valide, cette condition est équivalente à la convergence ponctuelle

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|\vec{\alpha}(\omega, x)\| = +\infty. \quad (31)$$

Lorsque le cocycle  $\vec{f}$  est d'intégrabilité  $L_{d,1}$ , il vérifie le théorème ergodique ponctuel, c'est-à-dire que l'on a la convergence ponctuelle

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\|\vec{\alpha}(\omega, x) - Lx\|}{\|x\|} = 0, \quad (32)$$

où  $L$  est la matrice carrée d'ordre  $d$  dont la  $i$ -ème colonne est le vecteur espérance du vecteur aléatoire  $\vec{f}_i$ . Si la matrice  $L$  est non dégénérée, soit si  $\det L \neq 0$ , ce théorème ergodique ponctuel implique la condition de transience (31) de Schmidt, et le flot spécial est bien défini (notons que cette condition d'intégrabilité  $L_{d,1}$  est absente dans le texte de Katok). Les questions qui se posent sont donc

- si  $\vec{f}$  est simplement intégrable, avec  $\det L \neq 0$ , a-t-on encore la condition de transience (31) ;
- y-a-t'il un cas particulier où un domaine fondamental canonique  $D$  peut être facilement construit ;
- A-t-on alors une formule pour la masse totale  $\hat{\mu}(\hat{\Omega})$  ;
- cette éventuelle formule pour la masse totale peut-elle se généraliser à d'autres cas plus généraux ?

Notons que nous avons démontré le résultat suivant, qui est lié aux questions précédentes :

**Théorème 8.** *Si  $\vec{f}$  est intégrable, avec  $\det L = 0$ , alors  $\vec{\alpha}$  est récurrent :*

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|\vec{\alpha}(\omega, x)\| = 0 \quad \omega - p.s.$$

On présente maintenant des éléments de réponse partielle aux trois dernières questions, mais pas de réponse complète. Leur intérêt est surtout de donner une image heuristique de ce que peut être le flot spécial en dimension  $d$ . C'est un sujet sur lequel nous continuerons à travailler dans le futur.

### 4.3 Un cas heuristique

On reprend le cadre du chapitre précédent, mais dans le cas  $d = 2$ , pour simplifier. Considérons, pour  $\omega \in \Omega$  fixé, les quatre points de  $\mathbb{R}^2$  suivant :

$$A_1(\omega) = \vec{0}, \quad A_2(\omega) = \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1), \quad A_3(\omega) = \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2), \quad A_4(\omega) = \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_2).$$

Supposons que, quelque soit  $\omega$ , les déterminants

$$\det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2)) \quad \text{et} \quad \det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_2))$$

sont positifs. Cela entraîne que

- le chemin fermé obtenu en reliant linéairement les points  $(A_i(\omega))_i$  dans l'ordre, puis en refermant de  $A_4(\omega)$  à  $A_1(\omega)$ , n'a pas de point double ;
- qu'il tourne dans le sens direct.

Notons  $K_\omega$  le domaine intérieur à ce chemin fermé, et considérons l'ensemble

$$W = \{(\omega, \vec{t}); \vec{t} \in K_\omega\}. \quad (33)$$

Katok a montré que si le cocycle  $\vec{\alpha}$  vérifie la convergence ponctuelle (32) avec  $\det L \neq 0$ , alors les translatés de  $W$  recouvrent l'espace :  $\cup_x T_x W = \Omega \times \mathbb{R}^2$ . On peut préciser ce résultat :

**Proposition 7.** *Soit  $\vec{\alpha}$  un cocycle de degré 1 pour une action stationnaire ergodique de  $\mathbb{Z}^2$ , d'intégrabilité  $L_{2,1}$ . Si les déterminants*

$$\det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2)) \quad \text{et} \quad \det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_2))$$

*sont positifs, alors l'ensemble  $W$  défini par (33) est un domaine fondamental pour le produit semi-direct, de masse  $\mu(W) = \det L$ .*

Le flot spécial est alors bien défini, et a pour masse totale  $\hat{\mu}(\hat{\Omega}) = \det L$ .

*Schéma de démonstration de la proposition.*— Commençons par le calcul de  $\mu(W)$ .

**Proposition 8.** *Soit  $\vec{\alpha}$  un cocycle de degré 1 pour une action stationnaire ergodique de  $\mathbb{Z}^2$ . On suppose les déterminants*

$$\det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2)) \quad \text{et} \quad \det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_2))$$

*positifs. Si  $\vec{\alpha}$  est de carré intégrable, on a  $\mu(W) = \det L$ .*

Notons que l'hypothèse «  $\vec{\alpha}$  est de carré intégrable » assure notamment que les déterminants ci-dessus sont intégrables, comme fonctions de  $\omega$ . En dimension  $d$ , ces déterminants sont des sommes à  $d!$  termes de produits à  $d$  facteurs. On est donc amené à supposer  $\vec{\alpha}$  de puissance  $d$ -ième intégrable, pour garantir l'intégrabilité de ces déterminants.

Cette proposition est une conséquence du résultat suivant :

**Lemme 2.** *Soit  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  deux cocycles de carré intégrable à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit*

$$\mathcal{L}(\omega) = \det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2)) + \det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_2)).$$

*Soit  $\mathcal{M}(\omega)$  la fonction analogue pour  $\vec{\beta}$ . On suppose  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  cohomologues dans  $L^2$ . Alors  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  ont même intégrale.*

*Schéma de démonstration du lemme.*— Sous les hypothèses de la proposition, les fonctions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  sont cohomologues dans  $L^1$ , comme cocycles de Katok de degré 2 : on peut trouver deux fonctions intégrables  $\phi_1$  et  $\phi_2$  telles que

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} + \delta_1 \phi_2 - \delta_2 \phi_1$$

(notons que les fonctions intégrables  $\phi_1$  et  $\phi_2$  se calculent explicitement comme sommes de produits à 2 facteurs, tirés des fonctions coordonnées des cocycles  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$ , et des fonctions de transfert apparaissant dans la relation de cohomologie liant  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$ ; la formule est purement algébrique). L'égalité ci-dessus donne l'égalité des intégrales.  $\square$

*Schéma de démonstration de la proposition.*— On a  $\mu(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{L} \, d\mu$ . Or d'après la densité des cobords de degré 1 (voir Boivin et Derriennic), on peut approcher  $\vec{\alpha} - L$  par des cobords  $L^2$ . La proposition 8 découle alors du lemme 2.  $\square$

Pour achever la démonstration de la proposition 7, il reste à démontrer que l'ensemble  $W$  défini ci-dessus est errant pour l'action  $S$ , c'est-à-dire

$$\text{si } x \neq y \text{ alors } S_x W \cap S_y W = \emptyset. \quad (34)$$

Or, pour  $\omega$  fixé, les quadrilatères (indexés par  $x \in \mathbb{Z}^2$ )

$$Q_x = \vec{\alpha}(\omega, x) + K_{T_x \omega}$$

se recollent deux à deux bord à bord. En effet deux de ces ensembles correspondant à deux points voisins de  $\mathbb{Z}^2$  ont un côté commun. D'autre part la convergence ponctuelle (32) est vérifiée avec  $\det L = \int_{\Omega} \mathcal{L} \, d\mu > 0$ . Ces ensembles

forment donc une nappe, recouvrant le plan  $\mathbb{R}^2$ . Pour que cette nappe ait un point double, il faudrait qu'elle se replie partiellement sur elle même. Cela nécessiterait un changement d'orientation, qui est impossible d'après le deuxième alinéa ci-dessus. Les quadrilatères  $(Q_x)_x$  ci-dessus sont donc d'intérieur deux à deux disjoints. Cela démontre l'égalité (34) et la proposition 7.

Cette proposition se généralise de la façon suivante. Soit un cocycle  $\vec{\alpha}$  vérifiant les hypothèses de la proposition 7 ci-dessus, et  $\vec{\beta}$  un cocycle de degré 1 intégrable, mesurablement cohomologue à  $\vec{\alpha}$ . Alors leurs matrices d'espérance respective  $L$  et  $M$  sont égales. De plus les produits semi-directs qu'ils engendrent sont isomorphes. Donc  $\vec{\beta}$  engendre aussi un flot spécial, sur un espace  $\hat{\Omega}_\beta$  de masse totale  $\hat{\mu}_\beta(\hat{\Omega}_\beta) = \det M$ . En d'autres termes, l'égalité  $\hat{\mu}(\hat{\Omega}) = \det L$  se généralise à tout cocycle intégrable mesurablement cohomologue à un cocycle vérifiant les hypothèses d'intégrabilité  $L_{2,1}$  et de positivité des déterminants. Cela laisse penser qu'aucune de ces deux hypothèses n'est vraiment essentielle. Les questions qui se posent sont alors :

- peut-on affaiblir l'hypothèse d'intégrabilité, à  $L^2$  notamment, voire à  $L^1$  ?
- peut-on affaiblir l'hypothèse de positivité des déterminants

$$\det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2)) \quad \text{et} \quad \det(\vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_1 + \vec{e}_2), \vec{\alpha}(\omega, \vec{e}_2))$$

pour la formule de la masse totale  $\hat{\mu}(\hat{\Omega}) = \det L$ , à  $\det L > 0$  notamment ?

**Nota Bene** : Figurent dans la liste ci-dessous les références citées dans le texte, et les principales références utilisées dans les travaux décrits par ce document.

## Références

- [1] D. BOIVIN – « Weak convergence for reversible random walks in a random environment », *Ann. Probab.* **21** (1993), no. 3, p. 1427–1440.
- [2] — , « Ergodic theorems for surfaces with minimal random weights », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **34** (1998), no. 5, p. 567–599.
- [3] D. BOIVIN et Y. DERRIENNIC – « The ergodic theorem for additive cocycles of  $\mathbf{Z}^d$  or  $\mathbf{R}^d$  », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **11** (1991), no. 1, p. 19–39.
- [4] H. CARTAN et S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [5] N. N. ČENCŮV – « Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé », *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **2** (1957), p. 281–282.
- [6] D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO – *Probabilités et statistiques. Tome 2*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Problèmes à temps mobile. [Movable-time problems].
- [7] H. A. DYE – « On groups of measure preserving transformation. I », *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 119–159.
- [8] L. EPHREMIDZE – « A remark on a theorem of Atkinson », *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **101** (1992), p. 39–45.
- [9] J. FELDMAN et C. C. MOORE – « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I », *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), no. 2, p. 289–324.
- [10] — , « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), no. 2, p. 325–359.
- [11] H. FLANDERS – « Infinite networks. I : Resistive networks », *IEEE Trans. Circuit Theory* **CT-18** (1971), p. 326–331.
- [12] K. GOLDEN et G. PAPANICOLAOU – « Bounds for effective parameters of heterogeneous media by analytic continuation », *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), no. 4, p. 473–491.
- [13] A. GOLDMAN – « Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien de P. Lévy à trois paramètres », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), no. 4, p. 351–381.
- [14] T. HIDA – *Stationary stochastic processes*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [15] V. V. JIKOV et S. M. KOZLOV et O. A. OLEÏNIK – *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994, Traduit du russe par G. A. Yosifian
- [16] A. B. KATOK – « The special representation theorem for multi-dimensional group actions », *Dynamical systems*, Vol. I—Warsaw, Soc. Math. France, Paris, 1977, p. 117–140. Astérisque, No. 49.

- [17] A. KATOK et B. HASSELBLATT – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [18] A. KATOK et S. KATOK – « Higher cohomology for abelian groups of toral automorphisms », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1995), no. 3, p. 569–592.
- [19] — , « Higher cohomology for abelian groups of toral automorphisms II. The partially hyperbolic case, and corrigendum », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **25** (2005), no. 6, p. 1909–1917.
- [20] Y. KATZNELSON et B. WEISS – « Commuting measure-preserving transformations », *Israel J. Math.* **12** (1972), p. 161–173.
- [21] H. KESTEN – « Surfaces with minimal random weights and maximal flows : a higher-dimensional version of first-passage percolation », *Illinois J. Math.* **31** (1987), no. 1, p. 99–166.
- [22] H. KEYNES, K. MADDEN, N. MARKLEY et M. SEARS – « An overview of the construction of suspension flows using continuous cocycles », Topological dynamics and applications (Minneapolis, MN, 1995), *Contemp. Math.*, vol. 215, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 133–148.
- [23] A. V. KOČERGIN – « The homology of functions over dynamical systems », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **231** (1976), no. 4, p. 795–798.
- [24] U. KRENGEL – *Ergodic theorems*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 6, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985, With a supplement by Antoine Brunel.
- [25] R. KÜNNEMANN – « The diffusion limit for reversible jump processes on  $\mathbf{Z}^d$  with ergodic random bond conductivities », *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), no. 1, p. 27–68.
- [26] P. LÉVY – *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Suivi d’une note de M. Loève. Deuxième édition revue et augmentée, Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1965.
- [27] D. A. LIND – « Products of coboundaries for commuting nonsingular automorphisms », *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **43** (1978), no. 2, p. 135–139.
- [28] M. A. LIFSHITS – *Gaussian random functions*, Mathematics and its Applications, vol. 322, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [29] A. N. LIVŠIČ – « Certain properties of the homology of  $Y$ -systems », *Mat. Zametki* **10** (1971), p. 555–564.
- [30] S. MAC LANE – *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [31] G. W. MACKEY – « Ergodic theory and virtual groups », *Math. Ann.* **166** (1966), p. 187–207.
- [32] B. MANDELBROT – « Fonctions aléatoires pluri-temporelles : approximation poissonnienne du cas brownien et généralisations », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **280** (1975), p. A1075–A1078.
- [33] H. P. MCKEAN, JR. – « Brownian motion with a several-dimensional time », *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **8** (1963), p. 357–378.

- [34] R. REBOLLEDO – « La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus », *Bull. Soc. Math. France Mém.* (1979), no. 62, p. v+125 pp. (1980).
- [35] K. SCHMIDT – *Cocycles on ergodic transformation groups*, Macmillan Company of India, Ltd., Delhi, 1977, Macmillan Lectures in Mathematics, Vol. 1.
- [36] — , « On recurrence », *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **68** (1984), no. 1, p. 75–95.
- [37] J. J. WESTMAN – « Cohomology for ergodic groupoids », *Trans. Amer. Math. Soc.* **146** (1969), p. 465–471.
- [38] — , « Cohomology for the ergodic actions of countable groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **30** (1971), p. 318–320.
- [39] N. WIENER – « The ergodic theorem », *Duke Math. J.* **5** (1939), no. 1, p. 1–18.
- [40] E. WONG et M. ZAKAI – « Isotropic Gauss-Markov currents », *Probab. Theory Related Fields* **82** (1989), no. 1, p. 137–154.
- [41] — , « Spectral representation of isotropic random currents », Séminaire de Probabilités, XXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1372, Springer, Berlin, 1989, p. 502–526.
- [42] J. Woś – « Approximate convergence in ergodic theory », *Proc. London Math. Soc. (3)* **53** (1986), no. 1, p. 65–84.
- [43] A. H. ZEMANIAN – *Infinite electrical networks*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Présentation de la situation . . . . .	5
1.1.1	Action de $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	5
1.1.2	Action de $\mathbb{R}^d$ . . . . .	7
1.2	Présentation résumée des résultats . . . . .	9
1.2.1	degré 1 . . . . .	9
1.2.2	degré $\geq 2$ , action de $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	9
1.2.3	degré $\geq 2$ , action de $\mathbb{R}^d$ . . . . .	10
1.3	Présentation résumée des perspectives . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Cocycles de degré 2 d'actions de <math>\mathbb{R}^3</math>, exemples et applications</b>	<b>12</b>
2.1	Cocycles de J.K.O. de degré 2 en dimension 3 . . . . .	12
2.1.1	Densité des cobords ( <i>Article 8</i> ) . . . . .	12
2.1.2	Théorème ergodique ( <i>Article 8</i> ) . . . . .	13
2.2	Application à la résistivité dans un milieu aléatoire stationnaire de dimension 3 ( <i>Prépublication 9</i> )	
2.3	Cocycle de Westman de degré 2 en dimension 3 . . . . .	17
2.3.1	Une troisième notion de cocycle de degré 2 . . . . .	17
2.3.2	Cocycles de Westman . . . . .	19
2.4	Exemple brownien . . . . .	21
2.4.1	Processus browniens classiques à 1 et 2 paramètres . . . . .	21
2.4.2	Cocycle brownien de degré 2 en dimension 3 ( <i>Article 7</i> ) . . . . .	25
2.4.3	Mesure spectrale du cocycle brownien ( <i>Article 6</i> ) . . . . .	27
2.5	Une interprétation électrique du mouvement brownien à trois paramètres	28
2.5.1	Cocycles généralisés à la Hida . . . . .	28
2.5.2	Laplacien du mouvement brownien à trois paramètres . . . . .	30
2.6	Propriété de Markov d'un cocycle-potentiel de degré 2 . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Cocycles de degré 2 d'actions de <math>\mathbb{Z}^3</math>, exemples et applications</b>	<b>32</b>
3.1	Équivalence cohomologique des notions de Katok et Westman ( <i>Article 5</i> )	32
3.1.1	Formules de passage . . . . .	32
3.1.2	De Westman à Katok : la trivialité de la cohomologie mesurable de degré $\geq 2$	33
3.1.3	De Katok à Westman : non trivialité de la cohomologie intégrable ou différentiable	34
3.2	Théorème ergodique ( <i>Article 3</i> ) . . . . .	35
3.3	Flux, résistivité ( <i>Article 4</i> ) . . . . .	36
3.4	Résistivité par extraction d'une cellule ( <i>Article 1</i> ) . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Cocycles de degré 1 d'actions de <math>\mathbb{Z}^d</math> et flot spécial</b>	<b>37</b>
4.1	Dimension 1 . . . . .	38
4.2	Dimension $d$ ( <i>Article 2</i> ) . . . . .	39
4.3	Un cas heuristique . . . . .	40





**Titre**

Cohomologie intégrable en théorie ergodique.

**Résumé**

Dans une première partie, nous nous intéressons au cas d'un système dynamique à trois paramètres continus. Nous étudions l'analogie entre cocycles et formes différentielles, ainsi que les propriétés statistiques observables sur des grandes surfaces plongées dans l'espace à trois dimensions. Enfin, nous abordons les connexions avec des problèmes issus de la physique. Nous avons entre autres répondu à une question d'électricité posée par Kesten (1987). Nous avons aussi montré l'existence du drap brownien surfacique dans l'espace à trois dimensions.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons au cas d'un système dynamique à trois paramètres discrets. Nous étudions notamment comment peut s'appliquer la théorie de la cohomologie des groupes. Nous avons montré entre autres que la dégénérescence de la cohomologie mesurable de degré supérieur ou égale à 2, démontrée par Feldman et Moore (1977), ne se généralise pas à la cohomologie intégrable.

Dans une troisième partie, nous évoquons le lien entre systèmes dynamiques à paramètres continus et discrets, à travers la notion de flot spécial. Nous avons notamment complété un travail de Katok (1977), en calculant la masse totale du flot spécial.