Université François-Rabelais de Tours — **M1 Mathématique**
2012-2013 — **Probabilités et Statistiques**

Fiche 5 : Tests suite

Exercice 1 *Test de comparaison de deux lois exponentielles*— Soit un modèle statistique correspondant à l'observation de n variables aléatoires indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, et n variables aléatoires indépendantes $(X'_1, \ldots, X'_n)$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda')$, d'espace de paramètres $\Theta = \{(\lambda, \lambda'), \lambda, \lambda' > 0\}$. Soient les hypothèses $\Theta_0 = \{\lambda = \lambda'\}$ et $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Soit Z la statistique définie par

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{X'}}{\overline{X} + \overline{X'}}.$$

Pour tout $c > 0$, on considère le test ϕ défini par

$$\begin{array}{lcl} |Z| > c & \Rightarrow & \phi(\omega) = 1 \\ |Z| \leq c & \Rightarrow & \phi(\omega) = 0. \end{array}$$

1) Vérifier que si $\lambda = \lambda'$, alors la loi de Z ne dépend pas de λ, et est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que Z et $-Z$ ont même loi).
2) Calculer la vraisemblance $\mathcal{L} = \frac{dP_{\lambda,\lambda'}}{dP_{\lambda_0,\lambda'_0}}$
3) L'exprimer en fonction des paramètres $\mu = \lambda - \lambda'$ et $\nu = \lambda + \lambda'$, $\mu_0 = \lambda_0 - \lambda'_0$ et $\nu_0 = \lambda_0 + \lambda'_0$.
4) On utilisera dans la suite les paramètres μ, ν. Vérifier que $\beta_\phi(\mu, \nu) = \beta_\phi(-\mu, \nu)$, où β_ϕ désigne la fonction puissance de ϕ.
5) Démontrer que

$$\begin{array}{rcl} \alpha_\phi & = & \beta_\phi(0, \nu) \\ 0 & = & \dfrac{\partial}{\partial \mu}\beta_\phi(0, \nu). \end{array}$$

6) Démontrer que pour tout α, on peut choisir c tel que $\alpha_\phi = \alpha$.
7) Démontrer que tout test sans biais ψ vérifie

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}_{(0,\nu)}(\psi - \alpha_\psi) & = & 0 \\ \mathbf{E}_{(0,\nu)}\big((\overline{X} - \overline{X'})\psi\big) & = & 0. \end{array}$$

Généraliser par densité à $\mathbf{E}_{(0,\nu)}((\psi - \alpha_\psi)f(\overline{X} + \overline{X'})) = \mathbf{E}_{(0,\nu)}\big((\overline{X} - \overline{X'})\psi f(\overline{X} + \overline{X'})\big) = 0$, où $f(\overline{X} + \overline{X'}) \in L^2$.

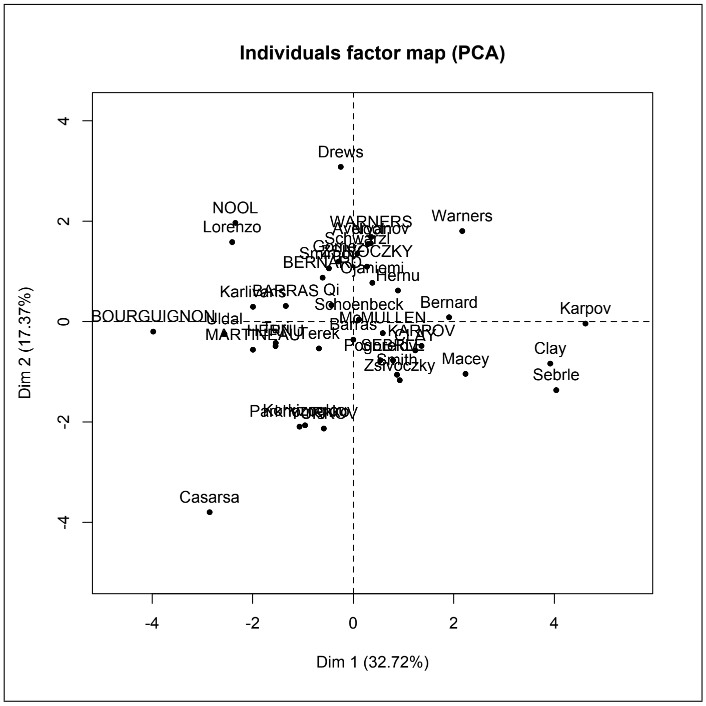
8) Vérifier d'autre part que pour des valeurs fixées de $\mu \neq 0$ et $\nu > 0$, il existe deux fonctions $f_{\mu,\nu}\big(\overline{X} + \overline{X'}\big) > 0$ et $g_{\mu,\nu}\big(\overline{X} + \overline{X'}\big)$ telle que ϕ vaut 1 ou 0 suivant que

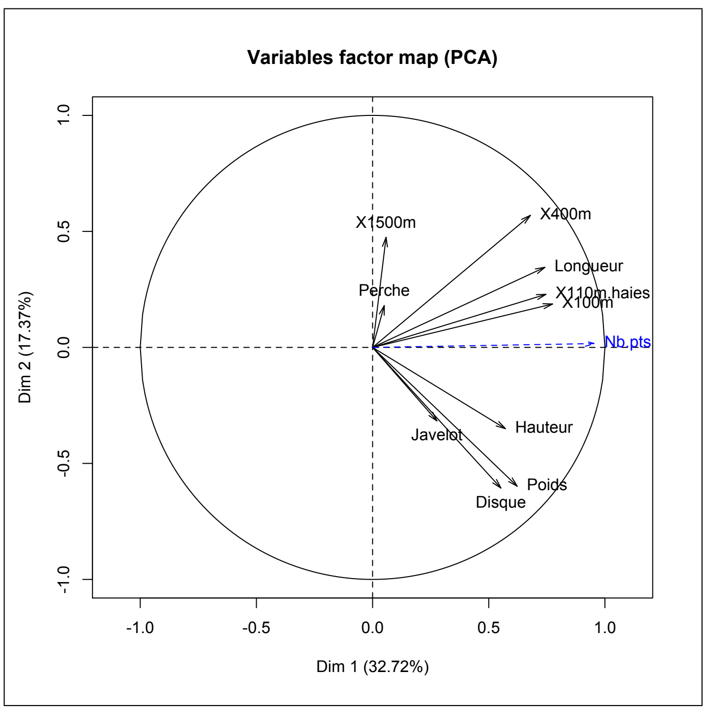
$$\frac{d\mathbf{P}_{\mu,\nu}}{d\mathbf{P}_{0,\nu}} > \big(\overline{X} - \overline{X'}\big)g_{\mu,\nu}\big(\overline{X} + \overline{X'}\big) + f_{\mu,\nu}\big(\overline{X} + \overline{X'}\big)$$

ou non.

9) En déduire que le test ϕ est plus puissant que tout test ψ sans biais de niveau $\alpha_\psi \leq \alpha_\phi$.
10) Démonter que ϕ est l'unique test UPPB de Θ_0 contre Θ_1 de son niveau.
11) Exprimer ce test avec la statistique $T = \frac{\overline{X}}{\overline{X'}}$.

Exercice 2 Les graphes de l'analyse en composantes principales des performances d'athlètes au décathlon, dans chacune des dix disciplines, lors de deux épreuves (J.O. et Decastar), sont présentés ci-dessous. A l'aide de ces graphes, réponder aux questions suivantes.





1) Quels sont les deux athlètes ayant des profils de résultats les plus typiquement opposés ? Quelles disciplines les opposent.

2) Au classement final, Sebrle et Clay devancent Karpov. Dans quels types de discipline Karpov a-t'il été particulièrement performant ?

3) Faire deux groupes avec les disciplines suivantes, de telle sorte que l'on puisse s'attendre à ce qu'un athlète ayant un bon résultat dans une discipline ait aussi de bons résultats dans les disciplines du même groupe : Disque, Hauteur, Javelot, Longueur, Poids, 100m, 110m-haies, 400m.