

Fiche 3 : Tests sans biais : applications numériques

Exercice 1 *Test de Student.* —

- 1) Soit un échantillon de taille $n = 10$ de la variable aléatoire X suivant une loi de Gauss de paramètres (m, σ^2) inconnus. L'expérience a permis d'observer les $n = 10$ valeurs suivantes.

0.7	-1.6	-0.2	-1.2	-0.1
3.4	3.7	0.8	0.0	2.0

On considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{m = 0\}$ contre $\Theta_1 = \{m \neq 0\}$

- Calculer le seuil c du théorème de Student, au niveau $\alpha = 5\%$.
 - Calculer la valeur t de la statistique de Student $T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}}{\sqrt{S^2}}$.
 - Donner la conclusion du test.
- 2) Soit un échantillon de taille $n = 10$ de la variable aléatoire X' suivant une loi de Gauss de paramètres (m', σ'^2) inconnus. L'expérience a permis d'observer les $n' = 10$ valeurs suivantes.

1.9	0.8	1.1	0.1	-0.1
4.4	5.5	1.6	4.6	3.4

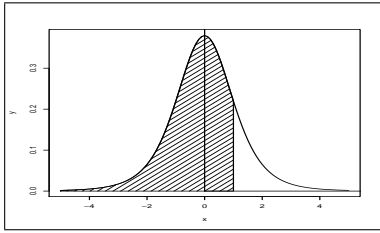
On considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{m' = 0\}$ contre $\Theta_1 = \{m' \neq 0\}$

- Calculer le seuil c du théorème de Student, au niveau $\alpha = 5\%$.
 - Calculer la valeur t' de la statistique de Student $T' = \sqrt{n'} \frac{\bar{X}'}{\sqrt{S'^2}}$.
 - Donner la conclusion du test.
- 3) On suppose connu que $\sigma = \sigma'$, et on considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{m = m'\}$ contre $\Theta_1 = \{m \neq m'\}$
- Calculer la valeur t'' de la statistique de Student

$$T'' = \frac{\bar{X} - \bar{X}'}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2 + (n'-1)S'^2}{n+n'-2}}}$$

- Calculer le seuil c'' du test de Student, au niveau $\alpha = 5\%$.
 - Donner la conclusion du test.
- 4) On ne suppose plus connu que $\sigma = \sigma'$, et on considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{\sigma = \sigma'\}$ contre $\Theta_1 = \{\sigma \neq \sigma'\}$
- Déterminer, sous l'hypothèse Θ_0 , la loi de la statistique $F = S^2/S'^2$ (cette loi s'appelle la loi de Fisher).
 - Calculer la valeur f de la statistique F .
 - Montrer qu'il existe des seuils c_1, c_2 tel que le test consistant à rejeter Θ_0 si $F \notin [c_1, c_2]$ soit de niveau $\alpha = 5\%$ (on ne cherchera pas un test sans biais).
 - Donner la conclusion du test.

Table des Quantiles de la loi de Student.



Quantiles $st_m(\beta)$ d'ordre β de la loi de Student à m degrés de liberté. Pour les degrés $m \geq 51$, utiliser la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour les quantiles d'ordre $\beta < 0.5$ utiliser $st_m(\beta) = -st_m(1 - \beta)$.

$m \backslash \beta$	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.9750	0.9900	0.9950	0.9990	0.9995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
31	0.256	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	0.255	0.529	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	0.255	0.529	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	0.255	0.529	0.850	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	0.255	0.528	0.850	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	0.255	0.528	0.850	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	0.255	0.528	0.850	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	0.255	0.528	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281	3.520
46	0.255	0.528	0.850	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	0.255	0.528	0.849	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265	3.500
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496

Table 6

Loi de Fisher F

$$P(F_{v_1, v_2} < f_{v_1, v_2, \alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0,975$

		v_1																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	•
v_2	1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	985	993	1001	1008	1013	1016	1017	1018
	2	38,5	39,0	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
	3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9
	4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,38	8,32	8,29	8,27	8,26
	5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,14	6,08	6,05	6,03	6,02
	6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	4,98	4,92	4,88	4,86	4,85
	7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,28	4,21	4,18	4,16	4,14
	8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,81	3,74	3,70	3,68	3,67
	9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,47	3,40	3,37	3,35	3,33
	10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,22	3,15	3,12	3,09	3,08
	11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,03	2,96	2,92	2,90	2,88
	12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,87	2,80	2,76	2,74	2,72
	13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,74	2,67	2,63	2,61	2,60
	14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,64	2,56	2,53	2,50	2,49
	15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,55	2,47	2,44	2,41	2,40
	16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68	2,57	2,47	2,40	2,36	2,33	2,32
	17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,72	2,62	2,50	2,41	2,33	2,29	2,26	2,25
	18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56	2,44	2,35	2,27	2,23	2,20	2,19
	19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,62	2,51	2,39	2,30	2,22	2,18	2,15	2,13
	20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,35	2,25	2,17	2,13	2,10	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,50	2,39	2,27	2,17	2,09	2,05	2,02	2,00	
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,44	2,33	2,21	2,11	2,02	1,98	1,95	1,94	
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,39	2,28	2,16	2,05	1,97	1,92	1,90	1,88	
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,34	2,23	2,11	2,01	1,92	1,88	1,85	1,83	
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20	2,07	1,97	1,88	1,84	1,81	1,79	
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07	1,94	1,83	1,74	1,69	1,66	1,64	
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99	1,87	1,75	1,66	1,60	1,57	1,55	
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,82	1,70	1,60	1,54	1,51	1,48	
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,36	2,28	2,21	2,00	1,88	1,75	1,63	1,53	1,47	1,43	1,40	
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85	1,71	1,59	1,48	1,42	1,38	1,35	
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18	2,11	1,90	1,78	1,64	1,51	1,39	1,32	1,27	1,23	
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14	2,07	1,86	1,74	1,60	1,46	1,34	1,25	1,19	1,14	
•	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71	1,57	1,43	1,30	1,21	1,13	1,00	