Université François-Rabelais de Tours **M1 Mathématique**
2012-2013 **Probabilités et Statistiques**

Fiche 3 : Tests sans biais

Exercice 1 *Test UPPB de l'hypothèse $m_1 \leq m \leq m_0$, avec σ^2 connu.—* Soit un modèle statistique correspondant à l'observation de n variables aléatoires indépendantes de loi de Gauss $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, d'espace de paramètres $\Theta = \{m,\ m \in \mathbb{R}\}$, la variance σ^2 étant connue. Soient $m_1 < m_0$ deux réels, et les hypothèses $\Theta_0 = \{m_1 \leq m \leq m_0\}$ et $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Soit Z la statistique définie par

$$Z = \frac{\overline{X} - (m_0 + m_1)/2}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Pour tout $c > 0$, on considère le test ϕ défini par

$$\begin{array}{lll} |Z| > c & \Rightarrow & \phi(\omega) = 1 \\ |Z| \leq c & \Rightarrow & \phi(\omega) = 0. \end{array}$$

1) Démontrer que le niveau α_ϕ de ϕ en tant que test de Θ_0 contre Θ_1 vérifie $\alpha_\phi = \beta_\phi(m_0) = \beta_\phi(m_1)$, où β_ϕ désigne la fonction puissance de ϕ.
2) Démontrer que pour tout α, on peut choisir c tel que $\alpha_\phi = \alpha$.
3) Démontrer que tout test sans biais ψ vérifie

$$\begin{array}{lll} \mathbf{E}_{(m_0,\sigma^2)}(\psi) & = & \alpha_\psi, \\ \mathbf{E}_{(m_1,\sigma^2)}(\psi) & = & \alpha_\psi. \end{array}$$

4) Vérifier d'autre part que pour toute valeur fixée de $m > m_0$, il existe deux constantes λ et $\lambda' > 0$ telles que ϕ vaut 1 ou 0 suivant que

$$\lambda \frac{d\mathbf{P}_{m_1}}{d\mathbf{P}_{m_0}} + \lambda' \frac{d\mathbf{P}_m}{d\mathbf{P}_{m_0}} > 1$$

ou non.
5) En déduire que sur le domaine $m > m_0$ le test ϕ est plus puissant que tout test ψ sans biais de même niveau.
6) À l'aide d'un raisonnement analogue pour $m < m_1$, démontrer que ϕ est l'unique test UPPB de Θ_0 contre Θ_1 de niveau α.

Exercice 2 *Test UPPB de l'hypothèse $m \leq m_0$ contre $m > m_0$, avec σ^2 inconnu.—* Soit un modèle statistique correspondant à l'observation de n variables aléatoires indépendantes de loi de Gauss $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soient m_0 un réel, et les hypothèses $\Theta_0 = \{(m, \sigma^2);\ m \leq m_0\}$ et $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Soit T la statistique de Student définie par

$$T = \frac{\overline{X} - m_0}{S/\sqrt{n}}.$$

On considère, pour tout $c > 0$, le test ϕ défini par

$$\begin{array}{lll} T > c & \Rightarrow & \phi(\omega) = 1 \\ T \leq c & \Rightarrow & \phi(\omega) = 0. \end{array}$$

1) Démontrer que le niveau α_ϕ de ϕ en tant que test de Θ_0 contre Θ_1 vérifie $\alpha_\phi = \beta_\phi(m_0, \sigma^2)$ où β_ϕ désigne la fonction puissance de ϕ.
2) Démontrer que pour tout α, on peut choisir c tel que $\alpha_\phi = \alpha$.

3) Démontrer que tout test sans biais ψ vérifie

$$\mathbf{E}_{(m_0,\sigma^2)}(\psi) = \alpha_\psi.$$

4) Vérifier d'autre part que pour des valeurs fixées de $m > m_0$ et $\sigma^2 > 0$, il existe une fonction $\lambda_{m,\sigma^2}\left(\overline{X^2}\right) > 0$ telle que ϕ vaut 1 ou 0 suivant que

$$\frac{d\mathbf{P}_{m,\sigma^2}}{d\mathbf{P}_{m_0,\sigma^2}} > \lambda_{m,\sigma^2}\left(\overline{X^2}\right)$$

ou non.

5) En déduire que le test ϕ est plus puissant que tout test ψ sans biais de niveau $\alpha_\psi \leq \alpha_\phi$.

6) Démonter que ϕ est l'unique test UPPB de Θ_0 contre Θ_1 de son niveau.