Université François-Rabelais de Tours **M1 Mathématique**
2012-2013 **Probabilités et Statistiques**

Fiche 2 : Estimateurs sans biais de variance minimale

Exercice 1 *Estimateur sans biais de σ.—* Soit un modèle correspondant à l'observation d'une suite de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, de paramètre $\vec{\theta} = (m, \sigma^2)$. Considérons la statistique $S^2 = \frac{n}{n-1}(\overline{X^2} - \overline{X}^2)$.

1) On rappelle que $(n-1)S^2/\sigma^2$ suit la loi du chi-carré à $n-1$ degrés de liberté. En déduire qu'il existe une constante κ_n telle que $\mathbf{E}_{m,\sigma^2}(S) = \kappa_n \sigma$.
2) Vérifier que la statistique $T = \kappa_{n-1}^{-1} S$ est un estimateur sans biais de σ
3) Soit Z un estimateur sans biais de σ, et $R_Z(m, \sigma^2)$ son risque. Vérifier que
$$R_Z(m, \sigma^2) = R_T(m, \sigma^2) + \mathbf{E}_{m,\sigma^2}\big((T - Z)^2\big) - 2\mathbf{E}_{m,\sigma^2}\big((T - Z)(T - \sigma)\big)$$
4) Vérifier que $\mathbf{E}_{\tilde{m},\tilde{\sigma}^2}\big((T - Z)\big) = \mathbf{E}_{m,\sigma^2}\big((T - Z)\mathcal{L}(\tilde{m}, \tilde{\sigma}^2, \cdot)\big)$ où $\mathcal{L}$ est une fonction que l'on déterminera (on pourra poser $W = T - Z$ puis $W = g(X_1, \ldots, X_n)$ et utiliser la densité de la loi de Gauss).
5) Démontrer que $\mathbf{E}_{m,\sigma^2}\big((T - Z)e^{z\overline{X^2} + z'\overline{X}}\big) = 0$ pour tout nombre complexe z de partie réelle $< n\sigma^{-2}/2$ et $z' \in \mathbb{C}$.
6) Démontrer que T est un estimateur sans biais de variance minimale de σ.
7) Démontrer que T est l'unique estimateur sans biais de variance minimale de σ.

Exercice 2 *ESBVM d'une proportion.—* Considérons le modèle statistique $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_p)_{p\in[0,1]})$ correspondant à l'observation d'un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p. Notons $(X_1, \ldots, X_n)$ la suite de statistiques associée, c'est-à-dire dont la loi sous $\mathbf{P}_p$ est celle d'une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Soit $p_0 \in]0, 1[$ fixé.

1) Vérifier que $\overline{X}$ un estimateur sans biais de p.
2) Calculer sa fonction de risque $R_{\overline{X}}(p)$.
3) Soit Z un estimateur sans biais de p, et $R_Z(p)$ son risque. Vérifier que
$$R_Z(p) = R_{\overline{X}}(p) + \mathbf{E}_p\big((\overline{X} - Z)^2\big) - 2\mathbf{E}_p\big((\overline{X} - Z)(\overline{X} - p)\big)$$
4) Vérifier que $\mathbf{E}_{\tilde{p}}\big((\overline{X} - Z)\big) = \mathbf{E}_p\big((\overline{X} - Z)\mathcal{L}(\tilde{p}, \cdot)\big)$ où
$$\mathcal{L}(\tilde{p}, \omega) = \mathcal{L}(p, \omega) = \Big(\frac{p}{p_0}\Big)^{n\overline{X}(\omega)}\Big(\frac{1-p}{1-p_0}\Big)^{n(1-\overline{X}(\omega))}$$
(on pourra poser $W = \overline{X} - Z$, puis $W = g(X_1, \ldots, X_n)$).
5) Démontrer que $\mathbf{E}_m\big((\overline{X} - Z)e^{z\overline{X}}\big) = 0$ pour tout nombre complexe z.
6) Démontrer que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de variance minimale de p.
7) Démontrer que $\overline{X}$ est l'unique estimateur sans biais de variance minimale de p.