**Université François-Rabelais de Tours** **M1 Mathématique**
**2012-2013** **Probabilités et Statistiques**

**Fiche 1 : Calculs de densité — analyse harmonique**

---

**Exercice 1** *Densité de la loi du chi-carré.—* Soit $(Z_i)_{1\leq i\leq d}$ une suite de $d$ variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On admet qu'il existe une constante $c_d$ telle que l'aire $A_{d-1}(r)$ de la sphère de dimension $d-1$ de rayon $r$ (dans $\mathbb{R}^d$) vaut $A_{d-1}(r) = c_d r^{d-1}$.

1) Soient $g$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ et $R$ la variable aléatoire définie par $R = \sqrt{\sum_{i=1}^d Z_i^2}$. À l'aide du théorème de Fubini, démontrer que

$$\mathbf{E}\big(g(R)\big) = \int_0^{+\infty} g(r)\frac{c_d}{\sqrt{2\pi}^d} r^{d-1} e^{-r^2/2}\, dr.$$

2) En déduire que la densité de la loi du chi-carré à $d$ degrés de liberté (c'est-à-dire la loi de la variable aléatoire $V = R^2$) est la fonction $f$ définie par

$$f(v) = \frac{c_d}{2\sqrt{2\pi}^d} v^{d/2-1} e^{-v/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v). \tag{1}$$

3) Vérifier que $\mathbf{E}(Z_1^2) = 1$ et $\mathbf{V}(Z_1^2) = 2$, puis en déduire que $\mathbf{E}(V) = d$ et $\mathbf{V}(V) = 2d$.

**Exercice 2** *Densité de la loi de Student.—* Soit $(Z_i)_{1\leq i\leq d}$ une suite de $d$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $R_1 = \sqrt{\sum_{i=2}^d Z_i^2}$.

1) Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer à l'aide du théorème de Fubini que

$$\mathbf{E}(f(Z_1,R_1)) = \int\int f(z,r)\frac{c_{d-1}}{\sqrt{2\pi}^d} r^{d-2} \exp\Big(-\frac{z^2+r^2}{2}\Big)\, drdz,$$

où la constante $c_{d-1}$ est celle introduite de l'exercice .

2) On considère les variables aléatoires $U = Z_1/R_1$ et $V = Z_1^2 + R_1^2$. Montrer que la densité de la loi du couple $(U,V)$ est donnée par

$$(u,v) \mapsto \frac{c_{d-1}}{2\sqrt{2\pi}^d} e^{-v/2} v^{d/2-1} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}^d}.$$

3) Vérifier que $U$ et $V$ sont indépendantes et préciser leurs densités.

4) Dans cette question et la suivante $(X_1,\ldots,X_n)$ désigne un échantillon de taille $n$ de la loi de Gauss $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Déduire des questions précédentes que si $m=0$ la densité de la loi de la variable aléatoire $T = \frac{\overline{X}\sqrt{d}}{S}$ (appelée loi de Student à $d-1$ degrés de liberté) est

$$t \mapsto \frac{c_{d-1}}{c_d\sqrt{d-1}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{d-1}}^d}.$$

5) Vérifier que si $m=0$ alors $T$ est indépendante de $\overline{X^2}$ (*Utiliser la question 3*).

**Exercice 3** *Prolongement analytique.—* Cet exercice propose le calcul de la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ par la méthode du prolongement analytique. On entend par « méthode du prolongement analytique » toute démonstration consistant à étendre à $\mathbb{C}$ une formule vérifiée sur $\mathbb{R}$, grâce au théorème des zéros isolés pour les fonctions holomorphes. Ce type de raisonnement est très efficace pour de nombreux problèmes d'analyse de Fourier.

Soit l'intégrale dépendant d'un paramètre $z \in \mathbb{C}$, définie par

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{zt} e^{-t^2/2}\, dt.$$

On admet que $I(0) = 1$.

1) Démontrer que la fonction $I$ est bien définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.
2) Démontrer que pour $z \in \mathbb{R}$, on a $I(z) = e^{z^2/2}$ (on utilisera l'égalité $2zt - t^2 = z^2 - (t-z)^2$).
3) Démontrer que la fonction $z \to I(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
4) En déduire $I(i\eta)$ pour $\eta \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4** *Densité des polynômes trigonométriques.*— Soit une variable aléatoire $X$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On se propose de vérifier que les combinaisons linéaires de fonctions de la famille $(e^{i\eta X})_{\eta \in \mathbb{R}}$ forment un espace vectoriel dense de l'espace $L^2(\sigma(X))$, où $\sigma(X)$ désigne la tribu engendrée par la variable aléatoire $X$. Supposons que $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$ (cette hypothèse simplifie la démonstration mais le résultat reste vrai sans elle). On admet que $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

1) Vérifier que

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^A \frac{\sin(tx)}{t}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

2) Pour $A > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on pose

$$X_{A,b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^A \frac{\sin(t(X-b))}{t}\, dt.$$

Établir la convergence suivant dans $L^2(\mathbf{P})$

$$\lim_{A\to+\infty} X_{A,b} = \mathbf{1}_{]-\infty,b[}(X) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{b\}}(X).$$

3) En déduire que la famille de fonctions $(X_{A,b})_{A>0, b\in\mathbb{R}}$ engendre un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\sigma(X))$.
4) Démontrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tous $n \geq 1$, $A > 0$, et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\Big| \int_0^A \frac{\sin(tx)}{t}\, dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{kAx}{n})}{k} \Big| < M \min\Big(Ax, \frac{x^2A^2}{n}\Big).$$

5) Pour $A > 0$, $b \in \mathbb{R}$, et $n \geq 1$, on pose

$$Y_{A,b,n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{kA(X-b)}{n})}{k}.$$

Démontrer que la famille de fonctions $(Y_{A,b,n})_{A>0, b\in\mathbb{R}, n\geq 1}$ engendre un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\sigma(X))$.
6) En déduire que les combinaisons linéaires de fonctions de la famille $(e^{i\eta X})_{\eta\in\mathbb{R}}$ forment un espace vectoriel dense de l'espace $L^2(\sigma(X))$.