**Université François-Rabelais de Tours** — **M1 Mathématique**
**2012-2013** — **Probabilités et Statistiques**

**Controle continu de mai**

---

**Exercice 1** *Tests de Student et Fisher.—*

1) Soit un échantillon de taille $n = 9$ de la variable aléatoire $X$ suivant une loi de Gauss de paramètres $(m, \sigma^2)$ inconnus. L'expérience a permis d'observer les $n = 9$ valeurs suivantes.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1.3$ | 1.5 | 1.1 | $-1.6$ | 0.7 | 0.2 | 0.4 | 0.7 | $-0.1$ |

On donne les valeurs numériques suivantes : $\overline{x} = \frac{1.6}{9} = 0.1778$, et $\overline{x^2} = \frac{8.9}{9} = 0.9889$. On considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{m = 0\}$ contre $\Theta_1 = \{m \neq 0\}$

a) Calculer le seuil $c$ du test de Student, au niveau $\alpha = 5\%$ (on précisera le nombre de degrés de liberté intervenant dans le calcul de $c$).

b) Calculer la valeur $t$ de la statistique de Student $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}}{\sqrt{S^2}}$.

c) Donner la conclusion du test.

d) Calculer la p-value.

2) Soit un échantillon de taille $n' = 9$ de la variable aléatoire $X'$ suivant une loi de Gauss de paramètres $(m', \sigma'^2)$ inconnus.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-0.2$ | $-1.0$ | 1.0 | $-1.0$ | 0.8 | 1.5 | $-0.2$ | $-0.1$ | $-0.5$ |

On donne les valeurs numériques suivantes : $\overline{x} = \frac{0.3}{9} = 0.0333$, et $\overline{x^2} = \frac{6.23}{9} = 0.6922$. On suppose connu que $\sigma = \sigma'$, et on considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{m = m'\}$ contre $\Theta_1 = \{m \neq m'\}$

a) Calculer la valeur $t''$ de la statistique de Student

$$T'' = \frac{\overline{X} - \overline{X'}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2 + (n'-1)S'^2}{n+n'-2}}}.$$

b) Calculer le seuil $c''$ du test de Student, au niveau $\alpha = 5\%$ (on précisera le nombre de degrés de liberté intervenant dans le calcul de $c$).

c) Donner la conclusion du test.

d) Calculer la p-value.

3) On ne suppose plus connu que $\sigma = \sigma'$, et on considère l'hypothèse $\Theta_0 = \{\sigma = \sigma'\}$ contre $\Theta_1 = \{\sigma \neq \sigma'\}$

a) Calculer la valeur $f$ de la statistique de Fisher $F = S^2/S'^2$.

b) Trouver des seuils $c_1, c_2$ tel que le test consistant à rejeter $\Theta_0$ si $F \notin [c_1, c_2]$ soit de niveau $\alpha = 5\%$ (on précisera les nombres de degrés de liberté intervenant dans le calcul de $c$).

c) Donner la conclusion du test.

**Exercice 2** *Test sur la moyenne $m$ avec variance connue.—* Soit un échantillon $(X_i)_{i\leq n}$ de taille $n$ d'une loi de Gauss $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ de paramètre $m$ inconnu, la variance $\sigma^2$ étant connue. Soit $m_0 \in \mathbb{R}$. Soient les l'hypothèses $\Theta_0 = \{m_0\}$ et $\Theta_1 = \mathbb{R}\setminus\Theta_0$. On considère la statistique

$$Z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}},$$

et le test $\phi$ consistant à rejeter $\Theta_0$ lorsque $|Z_n| > z$.

1) On note $\beta_\phi(m)$ la puissance de $\phi$. Exprimer cette fonction à l'aide de la fonction de répartition $F$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2) Vérifier que $\beta_\phi$ est une fonction symétrique par rapport à $m_0$ (c'est-à-dire vérifie $\beta_\phi(m_0+u) = \beta_\phi(m_0-u)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$), décroissante sur $]-\infty, m_0]$, et croissante sur $[m_0, +\infty[$.
3) En déduire que

$$\begin{aligned} \beta_\phi(m_0) &= \alpha_\phi, \\ \beta'_\phi(m_0) &= 0, \end{aligned}$$

   où $\alpha_\phi$ désigne le niveau $\phi$ en temps que test de $\Theta_0$ contre $\Theta_1$.
4) Soit $\psi$ un test de $\Theta_0$ contre $\Theta_1$. Vérifier que $\beta_\psi(m_0) = \alpha_\psi$.
5) Démontrer que si de plus $\psi$ est un test sans biais alors la fonction $\beta_\psi$ atteint son minimum en $m_0$. En déduire que $\beta'_\psi(m_0) = 0$.
6) Calculer la vraisemblance $\mathcal{L}$, définie par $\mathcal{L}(m,\omega) = \frac{d\mathbf{P}_{m,\sigma^2}}{d\mathbf{P}_{m_0,\sigma^2}}(\omega)$.
7) Déduire des deux questions précédentes que $\mathbf{E}_{m_0,\sigma^2}((\overline{X}-m_0)\psi) = 0$ (on pourra exprimer $\beta_\psi$ à l'aide de $\mathcal{L}$).
8) Vérifier d'autre part que pour toute valeur fixée $m \neq m_0$, il existe deux constantes $\lambda_m$ et $\lambda'_m$ tels que

$$\phi = 1 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{P}_{m,\sigma^2}}{d\mathbf{P}_{m_0,\sigma^2}} > \lambda_m + \lambda'_m\overline{X}.$$

9) Démontrer que pour tout test $\psi$ on a

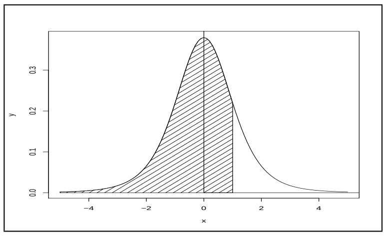
$$\Big(\frac{d\mathbf{P}_{m,\sigma^2}}{d\mathbf{P}_{m_0,\sigma^2}} - \lambda_m - \lambda'_m\overline{X}\Big)(\phi-\psi) \geq 0.$$

10) En déduire que si de plus $\psi$ est sans biais alors

$$\beta_\phi(m) - \beta_\psi(m) \geq K_m(\alpha_\phi - \alpha_\psi),$$

   où $K_m = \lambda_m + m_0\lambda'_m > 0$.
11) Démontrer que $\phi$ est un test UPPB de $\Theta_0$ contre $\Theta_1$.
12) Démontrer que $\phi$ est l'unique test UPPB de $\Theta_0$ contre $\Theta_1$.

**Table des Quantiles de la loi de Student.**



Quantiles $st_m(\beta)$ d'ordre $\beta$ de la loi de Student à $m$ degrés de liberté. Pour les degrés $m \geq 51$, utiliser la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour les quantiles d'ordre $\beta < 0.5$ utiliser $st_m(\beta) = -st_m(1-\beta)$.

| **m**$\beta$ | **0.60** | **0.70** | **0.80** | **0.90** | **0.95** | **0.9750** | **0.9900** | **0.9950** | **0.9990** | **0.9995** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.325 | 0.727 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 318.309 | 636.619 |
| **2** | 0.289 | 0.617 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.327 | 31.599 |
| **3** | 0.277 | 0.584 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.215 | 12.924 |
| **4** | 0.271 | 0.569 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| **5** | 0.267 | 0.559 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.869 |
| **6** | 0.265 | 0.553 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| **7** | 0.263 | 0.549 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.408 |
| **8** | 0.262 | 0.546 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| **9** | 0.261 | 0.543 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| **10** | 0.260 | 0.542 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| **11** | 0.260 | 0.540 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| **12** | 0.259 | 0.539 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| **13** | 0.259 | 0.538 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| **14** | 0.258 | 0.537 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| **15** | 0.258 | 0.536 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| **16** | 0.258 | 0.535 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 | 4.015 |
| **17** | 0.257 | 0.534 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| **18** | 0.257 | 0.534 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 | 3.922 |
| **19** | 0.257 | 0.533 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| **20** | 0.257 | 0.533 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| **21** | 0.257 | 0.532 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| **22** | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| **23** | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.768 |
| **24** | 0.256 | 0.531 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| **25** | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| **26** | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| **27** | 0.256 | 0.531 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| **28** | 0.256 | 0.530 | 0.855 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| **29** | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| **30** | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| **31** | 0.256 | 0.530 | 0.853 | 1.309 | 1.696 | 2.040 | 2.453 | 2.744 | 3.375 | 3.633 |
| **32** | 0.255 | 0.530 | 0.853 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.449 | 2.738 | 3.365 | 3.622 |
| **33** | 0.255 | 0.530 | 0.853 | 1.308 | 1.692 | 2.035 | 2.445 | 2.733 | 3.356 | 3.611 |
| **34** | 0.255 | 0.529 | 0.852 | 1.307 | 1.691 | 2.032 | 2.441 | 2.728 | 3.348 | 3.601 |
| **35** | 0.255 | 0.529 | 0.852 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 | 3.340 | 3.591 |
| **36** | 0.255 | 0.529 | 0.852 | 1.306 | 1.688 | 2.028 | 2.434 | 2.719 | 3.333 | 3.582 |
| **37** | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.305 | 1.687 | 2.026 | 2.431 | 2.715 | 3.326 | 3.574 |
| **38** | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.304 | 1.686 | 2.024 | 2.429 | 2.712 | 3.319 | 3.566 |
| **39** | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.304 | 1.685 | 2.023 | 2.426 | 2.708 | 3.313 | 3.558 |
| **40** | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| **41** | 0.255 | 0.529 | 0.850 | 1.303 | 1.683 | 2.020 | 2.421 | 2.701 | 3.301 | 3.544 |
| **42** | 0.255 | 0.528 | 0.850 | 1.302 | 1.682 | 2.018 | 2.418 | 2.698 | 3.296 | 3.538 |
| **43** | 0.255 | 0.528 | 0.850 | 1.302 | 1.681 | 2.017 | 2.416 | 2.695 | 3.291 | 3.532 |
| **44** | 0.255 | 0.528 | 0.850 | 1.301 | 1.680 | 2.015 | 2.414 | 2.692 | 3.286 | 3.526 |
| **45** | 0.255 | 0.528 | 0.850 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 | 2.690 | 3.281 | 3.520 |
| **46** | 0.255 | 0.528 | 0.850 | 1.300 | 1.679 | 2.013 | 2.410 | 2.687 | 3.277 | 3.515 |
| **47** | 0.255 | 0.528 | 0.849 | 1.300 | 1.678 | 2.012 | 2.408 | 2.685 | 3.273 | 3.510 |
| **48** | 0.255 | 0.528 | 0.849 | 1.299 | 1.677 | 2.011 | 2.407 | 2.682 | 3.269 | 3.505 |
| **49** | 0.255 | 0.528 | 0.849 | 1.299 | 1.677 | 2.010 | 2.405 | 2.680 | 3.265 | 3.500 |
| **50** | 0.255 | 0.528 | 0.849 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.261 | 3.496 |

**Table 6**

Loi de Fisher F

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} < \mathrm{f}_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0{,}975$

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 | 50 | 100 | 200 | 500 | • |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 648 | 800 | 864 | 900 | 922 | 937 | 948 | 957 | 963 | 969 | 985 | 993 | 1001 | 1008 | 1013 | 1016 | 1017 | 1018 |
| 2 | 38,5 | 39,0 | 39,2 | 39,3 | 39,3 | 39,4 | 39,4 | 39,4 | 39,4 | 39,4 | 39,4 | 39,4 | 39,5 | 39,5 | 39,5 | 39,5 | 39,5 | 39,5 |
| 3 | 17,4 | 16,0 | 15,4 | 15,1 | 14,9 | 14,7 | 14,6 | 14,5 | 14,5 | 14,4 | 14,3 | 14,2 | 14,1 | 14,0 | 14,0 | 13,9 | 13,9 | 13,9 |
| 4 | 12,2 | 10,6 | 9,98 | 9,60 | 9,36 | 9,20 | 9,07 | 8,98 | 8,90 | 8,84 | 8,66 | 8,56 | 8,46 | 8,38 | 8,32 | 8,29 | 8,27 | 8,26 |
| 5 | 10,0 | 8,43 | 7,76 | 7,39 | 7,15 | 6,98 | 6,85 | 6,76 | 6,68 | 6,62 | 6,43 | 6,33 | 6,23 | 6,14 | 6,08 | 6,05 | 6,03 | 6,02 |
| 6 | 8,81 | 7,26 | 6,60 | 6,23 | 5,99 | 5,82 | 5,70 | 5,60 | 5,52 | 5,46 | 5,27 | 5,17 | 5,07 | 4,98 | 4,92 | 4,88 | 4,86 | 4,85 |
| 7 | 8,07 | 6,54 | 5,89 | 5,52 | 5,29 | 5,12 | 4,99 | 4,90 | 4,82 | 4,76 | 4,57 | 4,47 | 4,36 | 4,28 | 4,21 | 4,18 | 4,16 | 4,14 |
| 8 | 7,57 | 6,06 | 5,42 | 5,05 | 4,82 | 4,65 | 4,53 | 4,43 | 4,36 | 4,30 | 4,10 | 4,00 | 3,89 | 3,81 | 3,74 | 3,70 | 3,68 | 3,67 |
| 9 | 7,21 | 5,71 | 5,08 | 4,72 | 4,48 | 4,32 | 4,20 | 4,10 | 4,03 | 3,96 | 3,77 | 3,67 | 3,56 | 3,47 | 3,40 | 3,37 | 3,35 | 3,33 |
| 10 | 6,94 | 5,46 | 4,83 | 4,47 | 4,24 | 4,07 | 3,95 | 3,85 | 3,78 | 3,72 | 3,52 | 3,42 | 3,31 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,09 | 3,08 |
| 11 | 6,72 | 5,26 | 4,63 | 4,28 | 4,04 | 3,88 | 3,76 | 3,66 | 3,59 | 3,53 | 3,33 | 3,23 | 3,12 | 3,03 | 2,96 | 2,92 | 2,90 | 2,88 |
| 12 | 6,55 | 5,10 | 4,47 | 4,12 | 3,89 | 3,73 | 3,61 | 3,51 | 3,44 | 3,37 | 3,18 | 3,07 | 2,96 | 2,87 | 2,80 | 2,76 | 2,74 | 2,72 |
| 13 | 6,41 | 4,97 | 4,35 | 4,00 | 3,77 | 3,60 | 3,48 | 3,39 | 3,31 | 3,25 | 3,05 | 2,95 | 2,84 | 2,74 | 2,67 | 2,63 | 2,61 | 2,60 |
| 14 | 6,30 | 4,86 | 4,24 | 3,89 | 3,66 | 3,50 | 3,38 | 3,29 | 3,21 | 3,15 | 2,95 | 2,84 | 2,73 | 2,64 | 2,56 | 2,53 | 2,50 | 2,49 |
| 15 | 6,20 | 4,76 | 4,15 | 3,80 | 3,58 | 3,41 | 3,29 | 3,20 | 3,12 | 3,06 | 2,86 | 2,76 | 2,64 | 2,55 | 2,47 | 2,44 | 2,41 | 2,40 |
| 16 | 6,12 | 4,69 | 4,08 | 3,73 | 3,50 | 3,34 | 3,22 | 3,12 | 3,05 | 2,99 | 2,79 | 2,68 | 2,57 | 2,47 | 2,40 | 2,36 | 2,33 | 2,32 |
| 17 | 6,04 | 4,62 | 4,01 | 3,66 | 3,44 | 3,28 | 3,16 | 3,06 | 2,98 | 2,92 | 2,72 | 2,62 | 2,50 | 2,41 | 2,33 | 2,29 | 2,26 | 2,25 |
| 18 | 5,98 | 4,56 | 3,95 | 3,61 | 3,38 | 3,22 | 3,10 | 3,01 | 2,93 | 2,87 | 2,67 | 2,56 | 2,44 | 2,35 | 2,27 | 2,23 | 2,20 | 2,19 |
| 19 | 5,92 | 4,51 | 3,90 | 3,56 | 3,33 | 3,17 | 3,05 | 2,96 | 2,88 | 2,82 | 2,62 | 2,51 | 2,39 | 2,30 | 2,22 | 2,18 | 2,15 | 2,13 |
| 20 | 5,87 | 4,46 | 3,86 | 3,51 | 3,29 | 3,13 | 3,01 | 2,91 | 2,84 | 2,77 | 2,57 | 2,46 | 2,35 | 2,25 | 2,17 | 2,13 | 2,10 | 2,09 |
| 22 | 5,79 | 4,38 | 3,78 | 3,44 | 3,22 | 3,05 | 2,93 | 2,84 | 2,76 | 2,70 | 2,50 | 2,39 | 2,27 | 2,17 | 2,09 | 2,05 | 2,02 | 2,00 |
| 24 | 5,72 | 4,32 | 3,72 | 3,38 | 3,15 | 2,99 | 2,87 | 2,78 | 2,70 | 2,64 | 2,44 | 2,33 | 2,21 | 2,11 | 2,02 | 1,98 | 1,95 | 1,94 |
| 26 | 5,66 | 4,27 | 3,67 | 3,33 | 3,10 | 2,94 | 2,82 | 2,73 | 2,65 | 2,59 | 2,39 | 2,28 | 2,16 | 2,05 | 1,97 | 1,92 | 1,90 | 1,88 |
| 28 | 5,61 | 4,22 | 3,63 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,34 | 2,23 | 2,11 | 2,01 | 1,92 | 1,88 | 1,85 | 1,83 |
| 30 | 5,57 | 4,18 | 3,59 | 3,25 | 3,03 | 2,87 | 2,75 | 2,65 | 2,57 | 2,51 | 2,31 | 2,20 | 2,07 | 1,97 | 1,88 | 1,84 | 1,81 | 1,79 |
| 40 | 5,42 | 4,05 | 3,46 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,62 | 2,53 | 2,45 | 2,39 | 2,18 | 2,07 | 1,94 | 1,83 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,64 |
| 50 | 5,34 | 3,98 | 3,39 | 3,06 | 2,83 | 2,67 | 2,55 | 2,46 | 2,38 | 2,32 | 2,11 | 1,99 | 1,87 | 1,75 | 1,66 | 1,60 | 1,57 | 1,55 |
| 60 | 5,29 | 3,93 | 3,34 | 3,01 | 2,79 | 2,63 | 2,51 | 2,41 | 2,33 | 2,27 | 2,06 | 1,94 | 1,82 | 1,70 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,48 |
| 80 | 5,22 | 3,86 | 3,28 | 2,95 | 2,73 | 2,57 | 2,45 | 2,36 | 2,28 | 2,21 | 2,00 | 1,88 | 1,75 | 1,63 | 1,53 | 1,47 | 1,43 | 1,40 |
| 100 | 5,18 | 3,83 | 3,25 | 2,92 | 2,70 | 2,54 | 2,42 | 2,32 | 2,24 | 2,18 | 1,97 | 1,85 | 1,71 | 1,59 | 1,48 | 1,42 | 1,38 | 1,35 |
| 200 | 5,10 | 3,76 | 3,18 | 2,85 | 2,63 | 2,47 | 2,35 | 2,26 | 2,18 | 2,11 | 1,90 | 1,78 | 1,64 | 1,51 | 1,39 | 1,32 | 1,27 | 1,23 |
| 500 | 5,05 | 3,72 | 3,14 | 2,81 | 2,59 | 2,43 | 2,31 | 2,22 | 2,14 | 2,07 | 1,86 | 1,74 | 1,60 | 1,46 | 1,34 | 1,25 | 1,19 | 1,14 |
| • | 5,02 | 3,69 | 3,12 | 2,79 | 2,57 | 2,41 | 2,29 | 2,19 | 2,11 | 2,05 | 1,83 | 1,71 | 1,57 | 1,43 | 1,30 | 1,21 | 1,13 | 1,00 |