Université François-Rabelais de Tours **M1 Mathématique**
2012-2013 **Probabilités et Statistiques**

Colles

Exercice 1 *Estimateur sans biais de σ^2 quand $m = 0$.—* Soit un modèle correspondant à l'observation d'une suite de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, de paramètre $\sigma^2 > 0$. Considérons la statistique $\overline{X^2}$.

1) Rappeler l'espérance et la variance de X_i^2, puis de $\overline{X^2}$.
2) Vérifier que $\overline{X^2}$ un estimateur sans biais de σ^2
3) Calculer sa fonction de risque $R_{\overline{X^2}}(\sigma^2)$.
4) Soit Z un estimateur sans biais de σ^2, et $R_Z(\sigma^2)$ son risque. Vérifier que
$$R_Z(\sigma^2) = R_{\overline{X^2}}(\sigma^2) + \mathbf{E}_{\sigma^2}\big((\overline{X^2} - Z)^2\big) - 2\mathbf{E}_{\sigma^2}\big((\overline{X^2} - Z)(\overline{X^2} - \sigma^2)\big)$$
5) Vérifier que $\mathbf{E}_{\tilde{\sigma}^2}\big((\overline{X^2} - Z)\big) = \mathbf{E}_{\sigma^2}\big((\overline{X^2} - Z)\mathcal{L}(\tilde{\sigma}^2, \cdot)\big)$ où
$$\mathcal{L}(\tilde{\sigma}^2, \omega) = (\tilde{\sigma}^2/\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{n}{2}(\tilde{\sigma}^{-2} - \sigma^{-2})\overline{X^2}(\omega)}$$
(on pourra poser $Z = g(X_1, \ldots, X_n)$ et utiliser la densité de la loi de Gauss).
6) Démontrer que $\mathbf{E}_{\sigma^2}\big((\overline{X^2} - Z)e^{z\overline{X^2}}\big) = 0$ pour tout nombre complexe z de partie réelle $< n\sigma^{-2}/2$
7) Démontrer que $\overline{X^2}$ est un estimateur sans biais de variance minimale de σ^2.
8) Démontrer que $\overline{X^2}$ est l'unique estimateur sans biais de variance minimale de σ^2.

Exercice 2 *Estimateur sans biais de σ^2 quand $m = 0$.—* Soit un modèle correspondant à l'observation d'une suite de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, de paramètre $\sigma^2 > 0$, la moyenne m étant connue. Considérons les statistiques $V_1 = \overline{X^2} - m^2$, $V_2 = \frac{n}{n-1}(\overline{X^2} - \overline{X}^2)$, $V_3 = \overline{(X - m)^2}$.

1) Vérifier que ces statistiques sont des estimateurs sans biais de σ^2.
2) Calculer leur risque.
3) Déterminer celui dont le risque est le plus petit.

Exercice 3 Soit le modèle statistique correspondant à l'observation d'un échantillon de taille n de la loi de Gauss $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soit $c > 0$. On note Y_c l'estimateur $Y_c = cS^2$.

1) Calculer la variance de Y_c, et son biais en tant qu'estimateur de σ^2.
2) Donner son risque quadratique $R_c(m, \sigma^2)$ en tant qu'estimateur de σ^2.
3) Vérifier que pour (m, σ^2) fixé, la fonction $c \mapsto R_c(m, \sigma^2)$ atteint son minimum en un point c_0 indépendant de (m, σ^2).
4) En comparant les fonctions de risque de Y_{c_0} et S^2, démontrer que ce dernier n'est pas admissible.

Exercice 4 *Théorème de Neyman-Pearson, dans le cas de deux hypothèses simples.—* On revient dans cet exercice à un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ général. Soient deux hypothèses $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta_1\}$. On note p_i, $i = 0, 1$, la densité de $\mathbf{P}_{\theta_i}$ par rapport à une mesure ν. Soit $\lambda_0 > 0$.

1) Démontrer que tout test ϕ tel que
$$\begin{array}{lcl} p_1(\omega) > \lambda_0 p_0(\omega) & \Rightarrow & \phi(\omega) = 1 \\ p_1(\omega) < \lambda_0 p_0(\omega) & \Rightarrow & \phi(\omega) = 0 \end{array}$$
est un test UPP de Θ_0 contre Θ_1.

2) Démontrer que tout test ψ UPP de même niveau vérifie les conditions ci-dessus avec le même coefficient λ_0, ν-p.s.

Exercice 5 *Estimateur sans biais pour la loi exponentielle.* — Soit un modèle correspondant à l'observation d'une suite de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

On admet qu'il existe une constante $c > 0$ telle que la statistique $T = c/\overline{X}$ vérifie $\mathbf{E}_\lambda(T) = \lambda$ pour tout $\lambda > 0$.

1) Vérifier que T un estimateur sans biais de λ
2) Soit Z un estimateur sans biais de λ, et $R_Z(\lambda)$ son risque. Vérifier que
$$R_Z(\lambda) = R_T(\lambda) + \mathbf{E}_\lambda\big((T-Z)^2\big) - 2\mathbf{E}_\lambda\big((T-Z)(c/\overline{X}-\lambda)\big)$$
3) Vérifier que $\mathbf{E}_{\tilde{\lambda}}\big((T-Z)\big) = \mathbf{E}_\lambda\big((T-Z)\mathcal{L}(\tilde{\lambda},\cdot)\big)$ où
$$\mathcal{L}(\tilde{\lambda},\omega) = (\tilde{\lambda}/\lambda)^n e^{-n(\tilde{\lambda}-\lambda)\overline{X}(\omega)}$$
(on pourra poser $Z = g(X_1,\dots,X_n)$ et utiliser la densité de la loi de exponentielle).
4) Démontrer que $\mathbf{E}_m\big((T-Z)e^{z\overline{X}}\big) = 0$ pour tout nombre complexe z de partie réelle $< n\lambda/2$
5) Démontrer que T est un estimateur sans biais de variance minimale de λ.
6) Démontrer que T est l'unique estimateur sans biais de variance minimale de λ.

Exercice 6 *Estimateur sans biais pour la loi exponentielle.* — Soit un modèle correspondant à l'observation d'une suite de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(m^{-1})$, de paramètre $m > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f_m(x) = m^{-1}e^{-\frac{x}{m}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Considérons la statistique $\overline{X}$.

1) Rappeler l'espérance et la variance de X_i, puis de $\overline{X}$.
2) Vérifier que $\overline{X}$ un estimateur sans biais de m
3) Calculer sa fonction de risque $R_{\overline{X}}(m)$.
4) Soit Z un estimateur sans biais de m, et $R_Z(m)$ son risque. Vérifier que
$$R_Z(m) = R_{\overline{X}}(m) + \mathbf{E}_m\big((\overline{X}-Z)^2\big) - 2\mathbf{E}_m\big((\overline{X}-Z)(\overline{X}-m)\big)$$
5) Vérifier que $\mathbf{E}_{\tilde{m}}\big((\overline{X}-Z)\big) = \mathbf{E}_m\big((\overline{X}-Z)\mathcal{L}(\tilde{m},\cdot)\big)$ où
$$\mathcal{L}(\tilde{m},\omega) = (\tilde{m}/m)^{-n}e^{-n(\tilde{m}^{-1}-m^{-1})\overline{X}(\omega)}$$
(on pourra poser $Z = g(X_1,\dots,X_n)$ et utiliser la densité de la loi de exponentielle).
6) Démontrer que $\mathbf{E}_m\big((\overline{X}-Z)e^{z\overline{X}}\big) = 0$ pour tout nombre complexe z de partie réelle $< nm^{-1}/2$
7) Démontrer que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de variance minimale de m.
8) Démontrer que $\overline{X}$ est l'unique estimateur sans biais de variance minimale de m.

Exercice 7

1) Soit le test $\phi = \mathbf{1}_{\overline{X}<c}$. Démontrer que sa puissance est croissante
2) En déduire que c'est un teste sans biais de $m \le m_0$ contre $m > m_0$
3) Soit $m > m_0$. Démontrer qu'il existe λ tel que ϕ vaut 0 ou 1 suivant que $\mathcal{L}(m) > \mathcal{L}(m_0)$ ou non
4) en déduire que pour tout test ψ tel que $\alpha_\psi \le \alpha_\phi$ on a $\beta_\psi(m) \le \beta_\phi(m)$.
5) Démontrer que ϕ est UPP.