Génération des cocycles de degré ≥ 2 d'une action mesurable stationnaire de $\mathbf{Z}^d$

Jérôme Depauw
Université Rabelais, Faculté des Sciences, Parc de Grandmont, 37200 Tours.
Adresse électronique: depauw@univ-tours.fr
Fax : (33) 2.47.36.70.68

Résumé. — Soit $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité. À une action T stationnaire de $\mathbf{Z}^d$ est associée une notion algébrique de cocycle de degré ≥ 1, le degré 1 correspondant au sens habituel. Celle-ci a été étudiée entre autres par Westman [15], Feldman et Moore [7]. Une autre notion de cocycle, présentant des analogies avec le calcul différentiel, à été étudiée par A. et S. Katok [10]. Nous présentons un mécanisme de génération associant, à tout cocycle de ce dernier type, un cocycle algébrique de même degré. De plus, toutes les classes de cohomologie algébrique peuvent être engendrées ainsi. Ce résultat a pour conséquence que tout cocycle algébrique de degré $\geq d+1$ est un cobord. Il permet aussi de montrer que dans la classe des cocycles intégrables, la cohomologie algébrique de degré $\leq d$ n'est pas triviale, alors qu'elle l'est dans la classe des cocycles mesurable dès le degré 2. Enfin, la méthode de génération présentée permet d'obtenir des cocycles algébriques vérifiant les théorèmes ergodiques correspondant à leur degré.

Abstract. — Let $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ be a probability space. To any stationary action T of $\mathbf{Z}^d$ is associated a notion of algebraic cocycle of degree ≥ 1, the degree 1 corresponding to the usual sense. This notion was studied by Westman [15], Feldman and Moore [7]. Another notion, which presents analogies with the differiential calculus, has been studied by A. et S. Katok [10]. We present a method of generation, which associate, to any cocycle in this last sense, an algebraic cocycle, of the same degree. Moreover, any cohomology class can be generated so. One consequence of this result is that any cocycle of degree $\geq d+1$ is a coboundary. Another one is that, in the class of integrable cocycles, the algebraic cohomology of degree $\leq d$ is not trivial, whereas it is in the class of measurable cocycles, as soon as the degree is ≥ 2. At last, this method of generation gives cocycles which verify the ergodic theorem corresponding to their degree.

Introduction

Soient $(T_j)_{1\leq j\leq 3}$ trois transformations stationnaires commutant d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Elles engendrent une action T de $\mathbf{Z}^3$, qui à un vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de coordonnées entières associe la transformation $T_{\vec{v}} = T_1^{v_1} T_2^{v_2} T_3^{v_3}$. Soit M un espace vectoriel de fonctions réelles définies sur Ω, et vérifiant la condition suivante: si $f \in M$ alors $f \circ T_{\vec{v}} \in M$, pour tout $\vec{v} \in \mathbf{Z}^3$. L'action de $\mathbf{Z}^3$ sur M, toujours notée T, est naturellement définie par $T_{\vec{v}} f = f \circ T_{\vec{v}}$. Considérons, pour tout entier $0 \leq n \leq 3$, les espaces $\mathcal{G}_n = M^{\binom{3}{n}}$ (c'est-à-dire $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_3 = M$ et $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = M^3$), et pour tout $1 \leq k \leq 3$, les opérateurs $\partial_k = T_k - I$. Par analogie avec la dérivation extérieure des champs de vecteurs, une notion d'accroissement extérieur se définit à l'aide d'opérateurs d_n, de $\mathcal{G}_n$ dans $\mathcal{G}_{n+1}$ par:

$$d_0 f \quad = \quad (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$$

$$
\begin{aligned}
d_1(A_1, A_2, A_3) &= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\
d_2(B_1, B_2, B_3) &= \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3
\end{aligned}
$$

Soit $A \in \mathcal{G}_1$. Si $\partial_k A_\ell = \partial_\ell A_k$, soit si $d_1 A = 0$, les fonctions A_k engendrent un cocycle $S_1 A$ de degré 1 pour l'action de $\mathbf{Z}^3$, c'est-à-dire une famille $(S_1 A(\omega, \vec{u}))_{\vec{u}}$ de fonctions de M, indexée par $\mathbf{Z}^3$, et vérifiant

$$S_1 A(\omega, \vec{u} + \vec{v}) = S_1 A(\omega, \vec{u}) + S_1 A(T_{\vec{u}} \omega, \vec{v}).$$

L'expression suivante en est donnée dans [3]: soit $(o; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ le repère canonique de l'espace affine $\mathbf{R}^3$. Posons provisoirement, pour $k = 1, 2, 3$, $\vec{u}_{-k} = -\vec{u}_k$, et $A_{-k} = -A_k \circ T_k^{-1}$. Alors $S_1 A(\omega, \vec{u}) = \sum_{i=0}^{I-1} A_{k_i}(T_{\overrightarrow{oe_i}} \omega)$ où la suite de direction $k_0, \ldots, k_{I-1} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ et la suite $e_0, \ldots, e_I$ de sommets de $\mathbf{Z}^3$ vérifient $e_0 = o$, $e_{i+1} = e_i + \vec{u}_{k_i}$, et $e_I = o + \vec{u}$. Remarquons qu'elle permet d'interpréter $S_1 A(\omega, \vec{u})$ comme étant la somme de A le long du chemin défini par la suite de sommets voisins e_i, $i = 0, \ldots, I$, reliant le sommet o au sommet $o + \vec{u}$. Si de plus A est de la forme $A = d_0 f$, alors $S_1 A$ est un cobord de degré 1, c'est-à-dire que l'on a $S_1 A(\omega, \vec{u}) = f(T_{\vec{u}} \omega) - f(\omega)$. Réciproquement, tout cocycle $(g_1(\omega, \vec{u}))_{\vec{u}}$ de degré 1 est de la forme $S_1 A$, avec $A_k = g_1(\omega, \vec{u}_k)$. A cause de cette correspondance, il est usuel de confondre un cocycle de degré 1 et la fonction A qui l'engendre. On appelle alors cocycle une fonction $A \in \mathrm{Ker}(d_1)$, et cobord une fonction $A \in \mathrm{Im}(d_0)$.

Suivant cette identification, les fonctions de $\mathrm{Ker}(d_n)$ peuvent être appelées cocycles de degré n, et celles de $\mathrm{Im}(d_{n-1})$ cobords de degré n. C'est l'usage pris par A. et S. Katok dans [10]. Ils y étudient l'existence de fonctions indéfiniment dérivables annulant d_n, qui ne soient pas l'image par d_{n-1} d'une fonction de même régularité, dans le cas d'une action de $\mathbf{Z}^d$ sur un tore $\mathbf{T}^D$. Comme l'expriment les théorèmes ci-dessous, pour les degrés ≥ 2, l'identification d'un cocycle *algébrique* avec une fonction de $\mathcal{G}_n$ n'est possible qu'à un cobord algébrique près. Pour cette raison, nous appellerons cocycles *géométriques* (resp. cobords *géométriques*) de degré n les fonctions de $\mathrm{Ker}(d_n)$ (resp. de $\mathrm{Im}(d_{n-1})$).

Soit $\mathcal{C}_n$ l'espace des cochaînes de degré n, c'est-à-dire des familles de fonctions de M indexées par n vecteurs de $\mathbf{Z}^3$. Le problème de la génération des cocycles aux degrés $n = 1, \ldots, 3$, consiste à construire un opérateur S_n de l'espace $\mathcal{G}_n$ dans l'espace $\mathcal{C}_n$ vérifiant les propriétés suivantes:

- Chaque fonction de la famille $S_n f_n$ s'obtient par un nombre fini de sommes (et de différences) de fonctions de la famille f_n, et de leurs translatées par l'action T.

- Lorsque $f_n \in \mathrm{Ker}(d_n)$, c'est-à-dire lorsque f_n est un cocycle géométrique, $S_n f_n$ est un cocycle algébrique de degré n.

- Lorsque $f_n \in \mathrm{Im}(d_{n-1})$, c'est-à-dire lorsque f_n est un cobord géométrique, $S_n f_n$ est un cobord algébrique de degré n.

- Tout cocycle algébrique de degré n est cohomologue à un cocycle de la forme $S_n f_n$.

Détaillons ces notions aux degrés 2 et 3. Un cocycle de degré 2 doit être engendré par une fonction $B \in \mathrm{Ker}(d_2)$. Il est défini comme un flux, mais cette notion de flux a aussi un sens sans la condition $d_2 B = 0$. En effet, considérons les réseaux $\mathcal{R} = \mathbf{Z}^3$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{R} + \overrightarrow{oo'}$, tels que les coordonnées du sommet $o' = (o_1, o_2, o_3) \in]0,1[^3$ soient rationnellement indépendantes, c'est-à-dire tels que l'équation $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{3} o_\ell k_\ell = k_0$ n'ait pas de solution entière non nulle. On a alors la définition suivante:

Définition. — Le flux d'une fonction $B = (B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{G}_2$ à travers un triangle de sommets (o, e_1, e_2), c'est-à-dire de sommet o et de côtés $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{oe_1}, \overrightarrow{e_1e_2})$, est défini par $S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v}) = \displaystyle\sum_{(k,e')} \eta_k B_k(T_{\overrightarrow{o'e'}}\omega)$, la somme portant sur les $(k, e') \in \{1,2,3\} \times \mathcal{R}'$ tels que le segment $[e' - \vec{u}_k, e']$ traverse la surface délimitée par le triangle de sommets (o, e_1, e_2); $\eta_k = \pm 1$ suivant le signe du déterminant de $(\overrightarrow{oe_1}, \overrightarrow{e_1e_2}, \vec{u}_k)$.

Remarque. — La condition sur l'irrationalité mutuelle des coordonnées de o' a pour but d'assurer que les segments $[e' - \vec{u}_k, e']$ ne coupent pas le bord du triangle $(o, \vec{u}, \vec{v})$. L'ensemble de sommation est donc bien défini.

Le fait que S_2 est bien un opérateur de génération des cocycles de degré 2 est exprimé par le théorème suivant.

Théorème (degré 2). — *Si $B \in \mathrm{Ker}(d_2)$, alors la famille de fonctions S_2B est un cocycle algébrique de degré deux pour l'action T de $\mathbf{Z}^3$:*

$$S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v}) + S_2B(\omega, \vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) + S_2B(T_{\vec{u}}\omega, \vec{v}, \vec{w}).$$

Si $B \in \mathrm{Im}(d_1)$, alors la famille de fonctions S_2B est un cobord algébrique de degré deux pour l'action T de $\mathbf{Z}^3$:

$$S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v}) = g_1(\omega, \vec{u}) - g_1(\omega, \vec{u} + \vec{v}) + g_1(T_{\vec{u}}\omega, \vec{v}),$$

où $(g_1(\omega, \vec{u}))_{\vec{u} \in \mathbf{Z}^3}$ est une famille de fonctions de M. Réciproquement, soit $(g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}))_{\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{Z}^3}$ une famille de fonctions de M vérifiant l'équation de cocycle algébrique de degré deux ci-dessus. Alors il existe $B \in \mathcal{G}_2$ avec $d_2B = 0$, et une famille $(g_1(\omega, \vec{u}))_{\vec{u} \in \mathbf{Z}^3}$ de fonctions de M tels que

$$g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}) - S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v}) = g_1(\omega, \vec{u}) - g_1(\omega, \vec{u} + \vec{v}) + g_1(T_{\vec{u}}\omega, \vec{v});$$

soit encore: tout cocycle algébrique de fonctions de M de degré 2 est cohomologue dans M à un cocycle de la forme S_2B.

Remarquons que l'équation de cocycle vérifiée par S_2B signifie que le flux de B à travers la surface fermée constituée des quatre faces du tétraèdre de sommet o et de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est nul, et que celle de cobord signifie que $S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ se calcule à partir des trois côtés du triangle de sommet o et de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Passons maintenant au degré 3. Le cocycle S_3h de degré 3 engendré par une fonction $h \in \mathcal{G}_3$ est défini par $S_3h(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \pm \displaystyle\sum_{e'} h(T_{\overrightarrow{o'e'}}\omega)$, la somme portant sur les sommets $e' \in \mathcal{R}$ situés dans le volume délimité par le tétraèdre de premier sommet o et de côtés $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; le signe est celui du déterminant de ces trois vecteurs. Le théorème est le suivant

Théorème (degré 3). — *Soit $h \in M$. La famille de fonctions S_3h définie ci-dessus est un cocycle algébrique de degré trois pour l'action T de $\mathbf{Z}^3$:*

$$\begin{aligned} S_3h(T_{\vec{t}}\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= S_3h(\omega, \vec{t}+\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) - S_3h(\omega, \vec{t}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) \\ &\quad + S_3h(\omega, \vec{t}, \vec{u}, \vec{v}+\vec{w}) - S_3h(\omega, \vec{t}, \vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

Si $h \in \mathrm{Im}d_2$, alors S_3h est un cobord algébrique de degré trois pour l'action T de $\mathbf{Z}^3$:

$$\begin{aligned} S_3h(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}) + g_2(\omega, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) \\ &\quad - g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}+\vec{w}) - g_2(T_{\vec{u}}\omega, \vec{v}, \vec{w}), \end{aligned}$$

où $(g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}))_{\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{Z}^3}$ est une famille de fonctions de M. Réciproquement, soit $(g_3(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbf{Z}^3}$ une famille de fonctions de M vérifiant l'équation de cocycle algébrique de degré trois ci-dessus. Alors il existe une fonction $h \in \mathcal{G}_3$, et une famille $(g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}))_{\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{Z}^3}$ de fonctions de M tels que

$$\begin{aligned} g_3(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) - S_3h(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}) + g_2(\omega, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) \\ &\quad - g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}+\vec{w}) - g_2(T_{\vec{u}}\omega, \vec{v}, \vec{w}). \end{aligned}$$

soit encore: tout cocycle algébrique de fonctions de M de degré 3 est cohomologue dans M à un cocycle de la forme S_3h.

Remarquons que l'équation de cocycle de degré 3 vérifiée par S_3h correspond à la décomposition du tétraèdre de premier sommet $o+\vec{t}$ et de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, en quatre tétraèdres de premier sommet o, et s'appuyant sur chacune des quatre faces de celui-ci; l'équation de cobord de degré 3 signifie que $S_3B(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ se calcule à partir des quatre faces du tétraèdre de sommet o et de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Les espaces $\mathcal{G}_n$ ne sont plus définis à partir du degré 4. La notion de cocycle algébrique, par contre, est définie pour tous les degrés $n \geq 0$ (les formules sont explicitées dans le paragraphe 2). Elle se trivialise néanmoins aussi à partir du degré 4, d'après un théorème de Cartan et Eilenberg:

Théorème (Cf. [2]) (degré 4) . — À partir du degré 4, tout cocycle algébrique de fonctions de M est cohomologue dans M à 0.

Ces théorèmes sont de nature purement algébrique. Ils ne dépendent donc pas du choix de l'espace M. Par contre l'existence de cocycles non triviaux pour les degrés ≤ 3 dépend à la fois de l'action T, et de l'espace M. Feldman et Moore [7] ont montré que, dans la classe des fonctions mesurables, seuls les cocycles de degré 1 peuvent être non triviaux.

Théorème (Cf. [7]). — Tout cocycle mesurable de degré ≥ 2 d'une action de $\mathbf{Z}^d$ est un cobord mesurable.

Pour des raisons relatives à l'espérance mathématique, le phénomène ne peut pas se produire dans le cas où M est un espace L^p. Nous donnons, dans le dernier paragraphe, des exemples montrant que la cohomologie L^p ne se réduit pas non plus aux constantes. Le cas le plus simple est celui du degré maximal $n = 3$. Plus précisément, nous avons les résultats suivants.

Exemple (degré 3). — Soit $(\mathcal{S}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ le cercle unité muni de la mesure de Lebesgue, et T une action stationnaire de $\mathbf{Z}^3$ engendrée par trois rotations irrationnelles. Il existe une fonction $h \in L^2$ telle que le cocycle de degré 3 engendré par h ne soit pas cohomologue dans L^2 à un cocycle de fonctions constantes. Cette fonction h est donnée explicitement.

Exemple (degré 2). — Soit $(\mathbf{T}^2, \mathcal{B}, \lambda)$ le tore de dimension 2 muni de la mesure de Lebesgue. Soit $M = L^2(\mathbf{T}^2)$. Il existe une action stationnaire T de $\mathbf{Z}^3$ et une fonction $B \in \mathcal{G}_2 \cap \ker(d_2)$ telles que le cocycle de degré 2 engendré par B ne soit pas cohomologue dans L^2 à un cocycle de fonctions constantes. Celles-ci sont données explicitement.

La notion de cocycle est liée au théorème ergodique. Nous présentons rapidement, dans l'ordre chronologique de leur apparition, les versions correspondant à chaque degré.

Le théorème ergodique de Birkhoff pour action de $\mathbf{Z}^3$ (voir [16]) correspond au degré 3. En effet, bien qu'il soit habituellement énoncé pour des moyennes sur des boules ou des parallélépipèdes, il s'adapte sans problème à des moyennes sur des tétraèdres. Si $h \in L^1(\Omega)$, il donne la convergence ponctuelle de la quantité $\dfrac{S_3 h(\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}{V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$ lorsque le volume $V(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ du tétraèdre $(o, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tend vers l'infini, et que ses angles restent supérieurs à un $\theta > 0$ fixé quelconque.

Au degré 1, comme l'ont montré d'une part Katok (voir [9]), dans le problème de la construction d'un domaine fondamental pour le flot spécial au dessus d'une action de $\mathbf{Z}^3$, d'autre part Koslov (voir [11]), dans le domaine du milieu aléatoire, la convergence à considérer est celle de la quantité $\dfrac{S_1 A(\omega, \vec{u})}{\|\vec{u}\|}$, lorsque $\|\vec{u}\|$ tend vers l'infini. Boivin et Derriennic [3] ont montré que la condition d'intégrabilité donnant la convergence ponctuelle dépend de la dimension $d = 3$ de l'action. L'hypothèse $p > d$ suffit, mais $p = d$ est insuffisant.

Enfin, au degré 2, la convergence à considérer apparaît à nouveau dans le domaine du milieu aléatoire (voir [5]). L'hypothèse d'intégrabilité, pour la convergence ponctuelle, dépend encore de la dimension de l'action (voir [4]). L'énoncé complet en est:

Théorème (Cf. [4]). — *Supposons que l'action T de $\mathbf{Z}^3$ est ergodique. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathbf{Z}^3$, notons respectivement $\vec{n}(\vec{u}, \vec{v})$, $\theta(\vec{u}, \vec{v})$, et $|\vec{u}, \vec{v}|$ le vecteur normal, le plus petit angle, et l'aire du triangle de premier sommet o et de côtés $(\vec{u}, \vec{v})$. Soit $p > 2$, et $B = (B_1, B_2, B_3) \in \mathrm{Ker}(d_2)$, avec $B_j \in L^p(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$. Pour tout $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, la quantité*

$$\sup_{\substack{|\vec{u}, \vec{v}| > s \\ \theta(\vec{u}, \vec{v}) > \theta_0}} \left| \frac{S_2 B(\omega, \vec{u}, \vec{v})}{|\vec{u}, \vec{v}|} - \sum_{j=1,2,3} n_j(\vec{u}, \vec{v}). \int_\Omega B_j d\mu \right|$$

tend presque sûrement vers 0, lorsque s tend vers l'infini.

A partir du degré 2, ces théorèmes ergodiques pour cocycles engendrés ne se généralisent pas aux cocycles algébriques généraux. Ceci est dû au fait qu'un cobord algébrique ne donne pas nécessairement un terme négligeable pour ces théorèmes, même lorsque la cochaîne de transfert dont il dérive a l'intégrabilité requise. Donnons un exemple au degré 2. Considérons la famille $(g_1(\omega, \vec{u}))_{\vec{u}}$ de fonctions constantes définies par $g_1(\omega, \vec{u}) \equiv \|\vec{u}\|^2$. Le cobord de degré 2 qui en dérive est défini par

$$g_2(\omega, \vec{u}, \vec{v}) \equiv \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2.$$

La quantité $\dfrac{g_2(\omega,\vec{u},\vec{v})}{|\vec{u},\vec{v}|}$ vaut donc 4 si le triangle de sommet o et de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ est isocèle rectangle en o, et vaut 0 s'il l'est en $o+\vec{u}$. Elle ne peut donc pas converger dans les conditions du théorème ci-dessus, si l'on autorise ces deux situations, c'est-à-dire si l'on prend $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Ce phénomène est lié au fait que les fonctions $g_1(\omega,\vec{u})$ de la cochaîne de transfert sont ici définies de façon purement formelle, sans rapport avec la longueur du segment $[o, o+\vec{u}]$. Le problème analogue au degré 3 peut aussi se produire.

Comme l'évoque ce qui précède, la notion de cocycle de degré 2 présente des analogies avec celle de flux à travers une surface, et celle de cocycle de degré n, avec celle d'intégrale d'une forme différentielle de degré n sur une sous-variété de dimension n. Une notion de pseudo-variété adaptée au réseau, c'est-à-dire composée, suivant sa dimension, de points, segments, triangles ou tétraèdres de sommets dans $\mathcal{R}$, est développée en topologie combinatoire. Ces composants élémentaires sont appelés simplexes orientés. Le cadre algébrique grâce auquel est formalisé le lien entre simplexes et cocycles constitue la première partie de cet article. Elle est décomposée en deux paragraphes, portant respectivement sur les simplexes et les cocycles. La seconde partie est formée des paragraphes 3 et 4, portant respectivement sur la démonstration d'un énoncé regroupant les théorèmes présentés ci-dessus, et sur les exemples.

1 Simplexes et chaînes

Les simplexes orientés, évoqués ci-dessus, sont invariants par permutation paire de leurs sommets, et une permutation impaire ne modifie que leur orientation. Par exemple les triangles de sommet o et de côtés respectivement $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u}+\vec{v},-\vec{v})$ ne se différencient que par l'orientation. Suivant les notations de l'introduction, on a donc $S_2B(\omega,\vec{u},\vec{v}) = -S_2B(\omega,\vec{u}+\vec{v},-\vec{v})$. Cependant l'équation

$$g_2(\omega,\vec{u},\vec{v}) + g_2(\omega,\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = g_2(\omega,\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) + g_2(T_{\vec{u}}\omega,\vec{v},\vec{w}),$$

définissant un cocycle de degré 2 n'entraîne pas que celui-ci vérifie $g_2(\omega,\vec{u},\vec{v}) = -g_2(\omega,\vec{u}+\vec{v},-\vec{v})$ (ce serait alors un cocycle alterné; sur la cohomologie associée aux cocycles alternés, voir le livre de Godement [8]). Une notion plus formelle de simplexe, pour laquelle les sommets ne sont pas permutables, doit donc être utilisée. Les propriétés de ces simplexes, dits algébriques, sont rapidement rappelées ici.

Définition. — Un simplexe algébrique t^n de dimension $n \geq 0$ est la donnée d'un sommet e du réseau $\mathcal{R}$, et, si $n \neq 0$, d'une suite ordonnée de n vecteurs à coordonnées entières $\vec{v}_i$, $i = 1,\ldots,n$. Il est noté $t^n = [e]\otimes[\vec{v}_1]\otimes\cdots\otimes[\vec{v}_n]$. Le sommet e est son premier sommet, et les $\vec{v}_i$ sont ses côtés.

Remarquons que la dimension n d'un simplexe algébrique n'est pas limitée par la dimension $d = 3$ du réseau. Les $n+1$ sommets e_i, $i = 0,\ldots,n$, de t^n sont déterminés par $e_0 = e$ et $\overrightarrow{e_{i-1}e_i} = \vec{v}_i$. Lorsque ces sommets sont affinement indépendants, le simplexe t^n peut être intuitivement représenté par l'enveloppe convexes de ceux-ci, au problème près de leur permutation. La première opération sur un simplexe de dimension n est sa translation d'un vecteur $\vec{u}$ à coordonnées entières. Celle-ci consiste naturellement en la translation du premier sommet, les côtés restant inchangés. Elle est notée $\tau^n_{\vec{u}}$, et éventuellement τ^n_k si $\vec{u}$ est le vecteur de base $\vec{u}_k$. Les simplexes peuvent former des “chaînes” en s'assemblant à l'aide d'une sommation algébrique.

Définition. — Une chaîne algébrique de dimension r est une fonction y^r définie sur l'ensemble des simplexes algébriques de dimension r, à valeurs dans $\mathbf{Z}$*, à support fini.*

L'ensemble des chaînes de dimension r muni de l'addition usuelle des fonctions forme un groupe. Le simplexe t^r s'identifie à la fonction valant 1 sur t^r, et 0 ailleurs. Toute chaîne est alors une somme finie de fonctions de ce type. Supposons numérotés les simplexes algébriques. Soit $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille de coefficients entiers tous nuls à partir d'un certain rang I. D'après l'identification évoquée ci-dessus, la chaîne y^r valant a_i sur t^r_i peut s'écrire $y^r = \sum_{0\le i\le I} a_i t^r_i$. Selon l'usage, l'ensemble de sommation est éclipsé, et l'on note en abrégé $y^r = \sum_i a_i t^r_i$. La chaîne 0^r désigne la chaîne *de dimension* r dont tous les coefficients sont nuls. Elle est le zéro pour l'addition.

Soient $r \ge 0$, un sommet $e \in \mathcal{R}$, et, si $r \ne 0$, r vecteurs $\vec{u}_{k_1}, \ldots, \vec{u}_{k_r}$, pris parmi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$. Considérons la chaîne de dimension r définie par

$$[e] \otimes [\vec{u}_{k_1}] \cdots [\vec{u}_{k_r}] \quad = \quad \sum \varepsilon.[e] \otimes [\vec{u}_{\ell_1}] \otimes \cdots \otimes [\vec{u}_{\ell_r}], \qquad (*)$$

la somme portant sur les permutations $\vec{u}_{\ell_1}, \ldots, \vec{u}_{\ell_r}$ des vecteurs $\vec{u}_{k_1}, \ldots, \vec{u}_{k_r}$, de signature ε. Si les r vecteurs sont différents, cette chaîne est composée de $r!$ simplexes distincts; pour $r = 2$ et 3, ceux-ci représentent respectivement les 2 triangles formant un carré et les 6 tétraèdres formant un cube de côté 1. Ces chaînes peuvent donc représenter les carrés et cubes de taille 1 de sommets de $\mathcal{R}$. On choisit de plus un ordre pour les côtés $\vec{u}_{k_r}$. Ce choix peut être arbitraire. La convention naturelle en dimension $d = 3$ est la suivante.

Définition. — Les éléments droits de dimension 2 *sont les carrés* $z^2 = [e] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$ *avec* $(\ell, m) = (2, 3)$, $(3, 1)$ *ou* $(1, 2)$. *Les éléments droits de dimension* 3 *sont les cubes* $z^3 = [e] \otimes [\vec{u}_1][\vec{u}_2][\vec{u}_3]$.

Aux dimensions 0 et 1, il n'y a qu'un choix possible. Les éléments droits sont $z^0 = [e]$ et $z^1 = [e] \otimes [\vec{u}_k]$. Aux dimensions $r \ge 4$, la chaîne $(*)$ ci-dessus est nécessairement la chaîne nulle 0^r, puisqu'il y a forcément répétition de l'un des côtés. Il n'y a donc pas d'élément droit. Pour $r \le 3$, on note $\mathcal{Z}^r = \{z^r_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des éléments droits de dimension r. Une chaîne droite x^r de dimension r est une chaîne pouvant s'écrire comme somme d'éléments droits. Elle est notée en abrégé $x^r = \sum_i a_i z^r_i$.

La notion de chaîne permet de définir la notion fondamentale de bord $\Delta^{n-1}t^n$ d'un simplexe t^n.

Définition. — Le bord d'un simplexe algébrique de dimension n est la chaîne de dimension $n-1$ définie par $\Delta^{n-1}([e] \otimes [\vec{v}_1] \otimes \cdots \otimes [\vec{v}_n]) =$

$$\begin{aligned} = \quad & [e + \vec{v}_1] \otimes [\vec{v}_2] \otimes \cdots \otimes [\vec{v}_n] \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [e] \otimes [\vec{v}_1] \otimes \cdots \otimes [\vec{v}_i + \vec{v}_{i+1}] \otimes \cdots \otimes [\vec{v}_n] \\ & + (-1)^n [e] \otimes [\vec{v}_1] \otimes \cdots \otimes [\vec{v}_{n-1}]. \end{aligned}$$

Remarquons que le bord d'un simplexe de dimension n est constitué de $n+1$ simplexes de dimension $n-1$. Pour $n = 1, 2, 3$, ceux-ci représentent respectivement les 2 extrémités d'un segment, les 3 côtés d'un triangle, les 4 faces d'un tétraèdre. L'opérateur de bord Δ est compatible avec les translations, au sens où le bord d'une translatée est la translatée du bord: $\Delta^{n-1}\tau^n_{\vec{u}} = \tau^{n-1}_{\vec{u}}\Delta^{n-1}$. La notion de bord s'étend par sommation aux chaînes de dimension r. La propriété classique suivante donne une caractérisation des chaînes qui sont le bord d'une chaîne de dimension supérieure.

Proposition. — Pour qu'une chaîne y^r de dimension r soit le bord d'une chaîne de dimension $r+1$, il faut et il suffit qu'elle soit fermée, c'est-à-dire que $\Delta^{r-1}y^r = 0^{r-1}$.

Démonstration. — Voir par exemple le théorème 5.1 du chapitre IV du livre de Mac-Lane [14], ainsi que la remarque qui le suit à propos d'une version "non normalisée".

Le bord d'un élément droit de dimension r se développe en la somme des bords des simplexes qui le composent. Après simplification, on obtient la somme suivante: $\Delta^{r-1}([e] \otimes [\vec{u}_{k_1}] \cdots [\vec{u}_{k_r}]) =$

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1}(\tau^{r-1}_{k_i} - I^{r-1})([e] \otimes [\vec{u}_{k_1}] \cdots \widehat{[\vec{u}_{k_i}]} \cdots [\vec{u}_{k_r}]),$$

où $\widehat{[\vec{u}_{k_i}]}$ indique que le côté $\vec{u}_{k_i}$ a été supprimé; I^{r-1} désigne l'identité du groupe des chaînes de dimension $r-1$. Remarquons que ce bord est constitué de $2r$ éléments droits. Pour $r = 1$, 2 et 3, ils sont respectivement les 2 extrémités d'un segment, les 4 arêtes d'un carré, les 6 faces d'un cube.

2 Cocycles et cochaînes

Un cocycle, et plus généralement une cochaîne de degré n, est une famille de fonctions de M indexée par n vecteurs de coordonnées entières.

Définition. — Une cochaîne $g_n = (g_n(\omega, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n))_{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n \in \mathbf{Z}^3}$ de degré $n \geq 1$ est une famille de fonctions de M. La somme de g_n sur le simplexe $t^n = [o] \otimes [\vec{v}_1] \otimes \cdots \otimes [\vec{v}_n]$ pour l'aléa ω est la quantité $g_n(\omega, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$. Elle est notée $\langle g_n, t^n \rangle(\omega)$.

Les cochaînes sont l'analogue des formes différentielles du calcul différentiel. Suivant cette analogie, la somme d'une cochaîne sur un simplexe est l'analogue de l'intégrale d'une forme différentielle sur une sous-variété.

Remarque. — Pour la cohérence algébrique, la définition ci-dessus doit être étendue formellement au degré 0. Cela donne : une cochaîne g_0 de degré 0 est une fonction de M. La quantité $g_0(\omega)$ est la somme de la cochaîne g_0 sur le simplexe $t^0 = [o]$, pour l'aléa ω. Elle est notée $\langle g_0, t^0 \rangle(\omega)$.

Le simplexe t^n apparaissant dans la définition ci-dessus a pour premier sommet o. Soit $\mathcal{T}^n_o$ l'ensemble de ces simplexes, dits "de base". Une cochaîne s'identifie donc à la famille $\langle g_n, t^n \rangle_{t^n}$ de fonction de M indexée par les simplexes de base de $\mathcal{T}^n_o$. D'autre part, tout simplexe est le translaté d'un tel simplexe. La notion de somme s'étend alors aux simplexes quelconques grâce à la règle $\langle g_n, \tau_{\vec{u}}^n t^n \rangle = T_{\vec{u}} \langle g_n, t^n \rangle$. Enfin, elle s'étend aux chaînes par sommation. On a alors le théorème simple mais fondamental suivant:

Théorème. — *Soit $\mathcal{A}^s$ un morphisme du groupe des chaînes de dimension r dans le groupe des chaînes de dimension s. On le suppose compatible avec les translations : $\tau_{\vec{u}}^s \circ \mathcal{A}^s = \mathcal{A}^s \circ \tau_{\vec{u}}^r$. Il existe alors un unique morphisme adjoint $\mathcal{B}_s$ du groupe des cochaînes de degré s dans le groupe des cochaînes de degré r, défini par $\langle \mathcal{B}_s(g_s), y^r \rangle = \langle g_s, \mathcal{A}^s(y^r) \rangle$.*

Démonstration. — La cochaîne $\mathcal{B}_s(g_s)$ s'identifie à la famille $\langle \mathcal{B}_s(g_s), t^r \rangle_{t^r}$ indexée par les simplexes de base. Celle-ci est déterminée par l'égalité ci-dessus: $\langle \mathcal{B}_s(g_s), t^r \rangle = \langle g_s, \mathcal{A}^s(t^r) \rangle$. Cette égalité s'étend à tous les simplexes par translation, en vertu de l'hypothèse faite sur $\mathcal{A}^s$, puis aux chaînes y^r, par sommation. Ceci démontre le théorème.

Remarquons que chaque fonction $\langle \mathcal{B}_s(g_s), t^r \rangle$ de la cochaîne $\mathcal{B}_s(g_s)$ est une somme finie de translatées par T de fonctions de la cochaîne g_s, puisque la chaîne $\mathcal{A}^s(t^r)$ est (comme toutes les chaînes) une somme finie de translaté par τ de simplexes de base. L'exemple fondamental est l'opérateur de cobord ∇_{r-1} adjoint de l'opérateur de bord Δ^{r-1}. Dans l'analogie avec le calcul différentiel, il correspond à la dérivation extérieure. La formule de passage à l'adjoint $\langle g_{r-1}, \Delta^{r-1} y^r \rangle = \langle \nabla_{r-1} g_{r-1}, y^r \rangle$ est l'analogue de la formule de Stokes. On déduit de l'expression du bord d'un simplexe la formule

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{r-1} g_{r-1})(\omega, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r) \quad = \quad & g_{r-1}(T_{\vec{v}_1}\omega, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r) \\
& + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i g_{r-1}(\omega, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_r) \\
& + (-1)^r g_{r-1}(\omega, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r-1}).
\end{aligned}
$$

Suivant l'usage, on a alors les définitions suivantes:

Définition. — *Un cobord g_r de degré r, ou plus précisément le cobord d'une cochaîne g_{r-1} de degré $r-1$, est la cochaîne $g_r = \nabla_{r-1} g_{r-1}$. Un cocycle de degré r est une cochaîne g_r vérifiant $\nabla_r g_r = 0$. Deux cocycles sont cohomologues lorsque leur différence est un cobord.*

Il est facile de vérifier que les notions habituelles de cocycle et cobord correspondent au degré 1.

Soient $\mathcal{A}^s$ et $\mathcal{A}'^{s'}$ deux morphismes de chaînes vérifiant les hypothèses du théorème. Soient $\mathcal{B}_s$ et $\mathcal{B}'_{s'}$ leurs adjoints respectifs. Si les degrés correspondent, l'adjoint de $\mathcal{A}^s \circ \mathcal{A}'^{s'}$ est $\mathcal{B}'_{s'} \circ \mathcal{B}_s$. Or le bord d'une chaîne étant une chaîne fermée, on a la règle $\Delta^{r-1} \Delta^r y^{r+1} = 0^{r-1}$. Celle-ci passe donc à l'adjoint : $\nabla_r \nabla_{r-1} = 0$. Un cobord est donc nécessairement un cocycle (la réciproque est fausse, comme le montrent les exemples du dernier paragraphe).

Par analogie avec la dualité entre chaînes et cochaînes vue précédemment, une notion de cochaîne géométrique est définie par:

Définition. — *Une cochaîne géométrique de degré $r = 0, \ldots, 3$ est une famille $(f_r(\omega, z^r))_{z^r}$ de fonctions de M indexées par l'ensemble $\mathcal{Z}_o^r$ des éléments droits de base de dimension r, c'est-à-dire ceux ayant o comme premier sommet. La* *somme de f_r sur z^r pour l'aléa ω est la quantité $f_r(\omega, z^r)$. Elle est notée $\langle\langle f_r, z^r\rangle\rangle(\omega)$.*

Remarque. — Le nombre d'éléments droits de base est le nombre de façons de choisir r vecteur $\vec{u}_{k_1}, \ldots, \vec{u}_{k_r}$ parmi les 3 vecteurs de base, soit $\frac{3!}{r!(3-r)!}$. L'espace des cochaînes géométriques de degré r s'identifie donc a l'espace $\mathcal{G}_r$ défini dans l'introduction. Les règles d'identification sont, selon le degré: $f(\omega) = f_0(\omega, o)$; $A_k(\omega) = f_1(\omega, [o] \otimes [\vec{u}_k])$; $B_k(\omega) = f_2(\omega, [o] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m])$ où k, ℓ, m est une permutation circulaire de 1, 2, 3; et enfin $h(\omega) = f_3(\omega, [o] \otimes [\vec{u}_1][\vec{u}_2][\vec{u}_3])$.

La notion de somme d'une cochaîne géométrique de degré r sur un élément droit de base s'étend aux éléments droits de premier sommet e quelconque par translation, puis aux chaînes droites x^r par sommation.

La construction précédente d'un opérateur adjoint s'adapte de manière évidente au cadre de la dualité entre chaînes droites et cochaînes géométriques. Or le bord d'une chaîne droite est encore une chaîne droite. L'opérateur Δ^n, $n = 0, 1, 2$ admet donc, en tant que morphisme entre les chaînes droites, compatible avec les translations, un adjoint qui est un morphisme entre les cochaînes géométriques. La proposition suivante signifie que celui-ci est l'opérateur d'accroissement extérieur d_n présenté dans l'introduction.

Proposition. — *Avec l'identification de la remarque précédente, on a la formule de passage à l'adjoint $\langle\langle f_r, \Delta^r x^{r+1}\rangle\rangle = \langle\langle d_r f_r, x^{r+1}\rangle\rangle$.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du calcul du bord d'un élément droit.

3 Opérateurs de génération des cocycles

Considérons la définition de l'opérateur S_2 donnée dans l'introduction. D'après l'identification du paragraphe précédent, le terme $B_k(T_{\overrightarrow{o'e'}}\omega)$ apparaissant dans le flux $S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ est la somme de la cochaîne géométrique identifiée à B, sur le carré $[e]\otimes[\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$, où $\overrightarrow{o'e'} = \overrightarrow{oe}$, et k, ℓ, m est une permutation circulaire de 1, 2, 3. Le flux $S_2B(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ est donc la somme de cette cochaîne géométrique sur la chaîne droite $x^2 = \sum \eta_k.[e] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$, cette dernière somme portant sur les carrés $[e] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$ tels que le segment $[e' - \vec{u}_k, e']$ traverse la surface délimitée par le triangle $[o]\otimes[\vec{u}]\otimes[\vec{v}]$. Mais alors, l'égalité $\langle S_2B, [o]\otimes[\vec{u}]\otimes[\vec{v}]\rangle = \langle\langle B, x^2\rangle\rangle$ signifie que l'opérateur S_2 peut être vu comme l'adjoint de l'opérateur associant au triangle $[o]\otimes[\vec{u}]\otimes[\vec{v}]$ la chaîne droite x^2. De plus, dans les conditions évoquées ci-dessus, liant les sommets e et e', ainsi que les directions k, ℓ et m, le carré $[e] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$ est traversé par le segment $[e' - \vec{u}_k, e']$. Or la chaîne droite x^2 est constituée des carrés tels que ce segment traverse aussi le triangle $[o] \otimes [\vec{u}] \otimes [\vec{v}]$. Elle forme donc une surface approchant le triangle. Cette notion d'opérateur d'approximation d'une chaîne par une chaîne droite, basée sur l'intersection des chaînes du réseau $\mathcal{R}$ avec celles du réseau décalé $\mathcal{R}' = \mathcal{R} + \overrightarrow{oo'}$, est développée maintenant, à tous les degrés.

Les définitions de simplexe, élément droit et opérateur de bord sont valides sans modification pour des sommets du réseau $\mathcal{R}'$. Soit $t^r = [e]\otimes[\vec{v}_1]\otimes\cdots\otimes[\vec{v}_r]$ (resp. $t^s = [e']\otimes[\vec{w}_1]\otimes\cdots\otimes[\vec{w}_s]$) un simplexe de $\mathcal{R}$ (resp. de $\mathcal{R}'$) de dimension r (resp. $s = 3 - r$). En vertu de la condition d'indépendance rationnelle sur les coordonnées de o', l'intersection de l'enveloppe convexe des sommets d'un des simplexes avec l'enveloppe convexe des sommets de l'autre est soit vide, soit réduite à un point. Dans ce dernier cas, l'intersection est positive ou négative suivant le signe du déterminant de $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s)$. D'où la définition suivante:

Définition. — L'indice d'intersection des 2 *simplexes algébriques t^r et t^s de sommets respectifs dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est le nombre $(t^r \times t^s)$ valant* 0, 1 *ou* -1 *suivant les cas énumérés ci-dessus. L'indice d'intersection de deux chaînes $y^r = \sum_i a_i t_i^r$ et $y^s = \sum_j b_j t_j^s$ est le nombre $(y^r \times y^s) = \sum_{i,j} a_i b_j (t_i^r \times t_j^s)$.*

Le lien entre bords et intersections peut être décrit de la manière suivante. soient t^2 et t'^2 deux triangles de sommets respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Si leurs bords sont enlacés, c'est-à-dire si le bord de t^2 fait le tour de celui de t'^2, alors l'intersection *du bord de* t^2 avec *la surface* t'^2 est constituée d'un point. On a donc $(\Delta^1 t^2 \times t'^2) = \pm 1$ suivant les orientations. Par contre, si les bords ne sont pas enlacés, alors cette intersection est constituée de 0 ou 2 points. De plus, dans ce dernier cas, les deux intersections sont de signes contraires. On a donc alors $(\Delta^1 t^2 \times t'^2) = 0$. A chaque fois, le nombre $(\Delta^1 t^2 \times t'^2)$ représente donc l'enlacement algébrique des deux bords. Dans ce raisonnement, les rôles des deux triangles sont symétriques. L'enlacement de $\Delta^1 t^2$ et de $\Delta^1 t'^2$ a donc les deux expressions $(\Delta^1 t^2 \times t'^2)$ et $(t^2 \times \Delta^1 t'^2)$. Ceci se généralise à toutes les dimensions, de la façon suivante.

Théorème. — Soit $r = 1, 2, 3$, et $s = 4 - r$. Soient t^r et t^s deux simplexes respectivement du réseau $\mathcal{R}$ et du réseau $\mathcal{R}'$. Alors le bord et l'intersection s'intervertissent, au signe près: $(\Delta^{r-1} t^r \times t^s) = (-1)^r (t^r \times \Delta^{s-1} t^s)$.

La démonstration complète est dans le livre d'Alexandrov, [1] page 150. Cette propriété s'étend évidemment aux chaînes.

Soit z^r un élément droit de dimension r du réseau $\mathcal{R}$. Il existe un unique élément droit z^{3-r} de dimension $3 - r$, du réseau $\mathcal{R}'$, intersectant z^r. Les éléments droits z^r et z^{3-r} sont dits duaux l'un de l'autre, et l'on note $z^{3-r} = (z^r)^*$. D'après les orientations choisies, leur intersection est positive: $(z^r \times (z^r)^*) = 1$. L'opérateur d'approximation R^r est défini par analogie avec le degré $r = 2$ par:

Définition. — Soit une chaîne y^r de dimension $r = 0, \ldots, 3$. La chaîne droite x^r approchant y^r est constituée des éléments droits z^r dont l'élément droit dual intersecte y^r, c'est-à-dire $x^r = \sum_i \eta_i z_i^r$ avec $\eta_i = (y^r \times (z_i^r)^*)$. L'opérateur faisant correspondre x^r à y^r est noté R^r. A partir de $r \geq 4$, on pose $R^r(y^r) = 0^r$.

On a aussi la caractérisation suivante:

Lemme. — *La chaîne droite x^r approchant une chaîne y^r est l'unique chaîne droite vérifiant, pour tout élément droit z^r: $(x^r \times (z^r)^*) = (y^r \times (z^r)^*)$. Cette égalité s'étend naturellement, par sommation, aux intersections de x^r et y^r avec les chaînes droites de dimension $3 - r$ du réseau dual.*

Démonstration. — Une chaîne droite x^r est une somme d'éléments droits: $x^r = \sum_i a_i z_i^r$, avec les z_i^r deux à deux distincts. Le coefficient a d'un élément droit $z^r \in \mathcal{Z}^r$ est alors l'intersection de x^r avec l'élément droit dual de z^r: $a = (x^r \times (z^r)^*)$, puisque $(z_i^r \times (z^r)^*) = 1$ ou 0 suivant que $z_i^r = z^r$ ou non. Si d'autre part x^r est la chaîne droite approchant une chaîne y^r, ce coefficient est défini comme étant l'intersection η de y^r avec ce même élément droit dual $(z^r)^*$. On a donc bien $(x^r \times (z^r)^*) = (y^r \times (z^r)^*)$. Ceci détermine les coefficients a de x^r sur tous les éléments droits z^r, ce qui caractérise bien cette chaîne droite.

Remarque. — Au degré $r = 0$, toute chaîne y^0 est droite. La caractérisation donnée par le lemme ci-dessus à donc pour conséquence immédiate que $x^0 = y^0$, c'est-à-dire que R^0 est l'identité I^0 du groupe des chaîne de degré 0.

Lorsqu'une chaîne y^r est translatée, x^r subit évidemment la même translation. L'opérateur R^r est donc compatible avec les translations. Il l'est aussi avec l'opérateur de bord, comme l'exprime la proposition suivante, qui est le point clef de ce paragraphe.

Proposition. — *Soit y^{r+1} une chaîne de sommets de $\mathcal{R}$ et y^r son bord. Soient x^{r+1} et x^r les chaînes droites les approchant. Si $r = 0, 1, 2$, alors x^r est le bord de x^{r+1}. Si $r = 3$, alors $x^r = 0^r$. Soit encore, $R^r\Delta^r = \Delta^r R^{r+1}$, $r \geq 0$.*

Démonstration. — Soient une chaîne y^{r+1}, et, selon l'énoncé, $y^r = \Delta^r y^{r+1}$, $x^r = R^r(y^r)$, et $x^{r+1} = R^{r+1}(y^{r+1})$. Commençons par le cas $r = 0, 1, 2$. Il faut montrer que $x^r = \Delta^r x^{r+1}$. C'est une conséquence du théorème d'Alexandrov. Calculons le coefficient d'un élément droit z^r dans $\Delta^r x^{r+1}$. Comme cela vient d'être évoqué, c'est l'intersection de $\Delta^r x^{r+1}$ avec l'élément droit dual $(z^r)^*$. D'après le théorème d'Alexandrov, c'est encore égal à

$$(-1)^{r+1}(x^{r+1} \times \Delta^{2-r}(z^r)^*).$$

D'après le lemme ci-dessus, on peut substituer à la chaîne droite x^{r+1} la chaîne y^{r+1} qu'elle approche. En réappliquant le théorème d'Alexandrov, on obtient donc $(y^r \times (z^r)^*)$. En substituant à nouveau à y^r la chaîne droite x^r l'approchant, c'est finalement égal à $(x^r \times (z^r)^*)$, c'est-à-dire au coefficient de z^r dans x^r. Les chaînes droites $\Delta^r x^{r+1}$ et x^r ont donc mêmes coefficients, ce qui démontre la proposition pour $r \leq 2$: $\Delta^r x^{r+1} = x^r$. Soit maintenant $r = 3$. Il faut montrer que $x^3 = 0^3$. C'est une conséquence du fait qu'alors $r = d$. En effet x^3 est une somme de cubes : $x^3 = \sum_e a_e [e] \otimes [\vec{u}_1][\vec{u}_2][\vec{u}_3]$. D'après le calcul du bord d'un cube, et une transformation d'Abel de la somme obtenue, on a donc

$$\Delta^2 x^3 = \sum_{k=1}^{3} \sum_{e \in \mathcal{R}} \big(a_{e-\vec{u}_k} - a_e\big)[e] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$$

où ℓ, m sont tels que k, ℓ, m soit une permutation circulaire de 1, 2, 3. Mais, d'après la propriété en dimension 2, le bord de x^3 est la chaîne droite approchant le bord de y^3. Or ce dernier est nul puisque y^3 est le bord de y^4; la chaîne droite x^3 est donc fermée. Tous les coefficients $(a_{e-\vec{u}_k} - a_e)$ sont donc nuls, c'est-à-dire que les coefficients a_e sont tous égaux. Ces derniers sont alors tous nuls, puisque qu'une chaîne est une somme finie. Ceci démontre la proposition pour $r = 3$: $x^3 = 0^3$. Aux degrés $r \geq 4$, la proposition est purement formelle.

La cochaîne $S_r f_r$ engendrée par f_r est alors la famille de fonctions, indexée par les simplexes de bases $t^r \in \mathcal{T}_o$, déterminée par la formule de passage à l'adjoint $\langle S_r f_r, t^r \rangle = \langle\langle f_r, R^r(t^r) \rangle\rangle$. Selon un principe déjà évoqué, cette égalité passe aux simplexes quelconques, puisque les opérateurs R^r sont compatibles avec les translations. Elle passe ensuite aux chaînes par sommation. Comme cela a été dit au début de ce paragraphe, la définition de S_2 comme adjoint de R^2 est équivalente à celle donnée dans l'introduction. Il en est de même pour S_3, comme adjoint de R^3. Le cas de S_1 est plus délicat. Considérons la formule de l'introduction donnant $S_1 A(\omega, \vec{u})$. Elle n'a été posée que pour des fonctions $A \in \mathcal{G}_1$ vérifiant $d_1 A = 0$. C'est à cette condition que la somme ne dépend pas du chemin suivi pour aller de o à $o + \vec{u}$. Le prolongement de l'opérateur S_1 à $\mathcal{G}_1$ tout entier, comme adjoint de R^1, consiste à imposer que ce chemin soit la chaîne droite $R^1([o] \otimes [\vec{u}])$. On peut en effet vérifier que cette dernière va bien de o à $o + \vec{u}$ en calculant ses extrémités, c'est-à-dire son bord: d'après la commutation de R et Δ donnée dans la proposition précédente, $\Delta^0 R^1([o] \otimes [\vec{u}]) = R^0 \Delta^0([o] \otimes [\vec{u}])$, ce qui vaut bien $[o + \vec{u}] - [o]$, puisque R^0 est l'identité. Les deux définitions de S_1 sont donc bien équivalentes sur $\mathrm{Ker}(d_1)$.

La commutation $R^r \Delta^r = \Delta^r R^{r+1}$ devient, par passage à l'adjoint, $\nabla_r S_r = S_{r+1} d_r$. On a alors:

Corollaire. — *Soit f_r une cochaîne géométrique de degré $r = 0, \ldots, 3$. Pour $r = 0$, 1, 2, si $d_r f_r = 0$, alors la cochaîne $S_r f_r$ qu'elle engendre est un cocycle. Pour $r = 3$, celle-ci est toujours un cocycle. Pour $r = 1$, 2, 3, si f_r peut s'écrire sous la forme $f_r = d_{r-1} f_{r-1}$ alors la cochaîne qu'elle engendre est un cobord.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la relation de commutation ci-dessus. Pour $r = 0, 1, 2$, si $d_r f_r = 0$, celle-ci devient $\nabla_r S_r f_r = 0$. La cochaîne $S_r f_r$ est bien un cocycle. Pour $r = 3$, puisque $S_4 = 0$ (car $R^4(t^4) = 0^4$) la relation devient $\nabla_3 S_3 f_3 = 0$. La cochaîne $S_3 f_3$ est donc toujours un cocycle. Pour $r = 1$, 2, 3, si f_r peut s'écrire sous la forme $f_r = d_{r-1} f_{r-1}$, la relation devient $S_r f_r = \nabla_{r-1}(S_{r-1} f_{r-1})$. La cochaîne $S_r f_r$ est bien un cobord.

Pour achever ce paragraphe, il faut encore associer, à une cochaîne g_r, une cochaîne géométrique f_r telle que, si g_r est un cocycle, alors il est cohomologue au cocycle engendré par f_r. Celle-ci, correspondant aux sommes de g_r sur les chaînes droites seules, est définie comme famille de fonctions indexée par les éléments droits de base $z^r \in \mathcal{Z}_o^r$ par $\langle\langle f_r, z^r \rangle\rangle = \langle g_r, z^r \rangle$. La cochaîne géométrique f_r s'appelle la partie géométrique de g_r. L'opérateur associant à une cochaîne de degré r la cochaîne engendrée par sa partie géométrique est noté S'_r. Suivant une méthode classique en algèbre, on montre que la famille d'opérateurs $(S'_r)_{r \geq 0}$ est homotope à l'identité. Plus précisément:

Théorème. — *Il existe une suite d'opérateurs $(Q_r)_{r \geq 1}$ de l'espace des cochaînes $\mathcal{C}_r$ de degré r dans celui des cochaînes $\mathcal{C}_{r-1}$ de degré $r - 1$ tels que chaque fonction de la cochaîne $Q_r(g_r)$ soit une somme finie de translatées de fonctions de la cochaîne g_r, et vérifiant, pour $r \geq 1$, $I_r - S'_r - \nabla_{r-1} Q_r = Q_{r+1} \nabla_r$, où I_r désigne l'opérateur identité de $\mathcal{C}_r$.*

De cette relation d'homotopie découle le résultat attendu. En effet, sur un cocycle g_r de degré r, puisque $\nabla_r g_r = 0$, elle devient $g_r - S'_r g_r - \nabla_{r-1}(Q_r g_r) = 0$. Donc g_r est bien cohomologue à $S'_r g_r$ (soit à 0 si $r \geq 4$). Notons qu'il s'agit de cohomologie dans M. En effet la cochaîne de transfert $g_{r-1} = Q_r(g_r)$ est une famille de fonctions de M. Ce théorème et le corollaire le précédent contiennent donc bien les théorèmes de l'introduction.

Les opérateurs Q_r sont à nouveau les adjoints d'opérateurs P^r donnés par le lemme suivant.

Lemme. — *Il existe une suite d'opérateurs $(P^r)_{r\geq 1}$ définis sur les chaînes de dimension $r-1$ à valeurs dans les chaînes de dimension r, vérifiant pour $r \geq 1$, $I^r - R^r - P^r\Delta^{r-1} = \Delta^r P^{r+1}$, et compatibles avec les translations: $P^{r+1} \circ \tau^r_{\vec{u}} = \tau^{r+1}_{\vec{u}} \circ P^{r+1}$.*

Démonstration du lemme. — Ce lemme est la conséquence immédiate d'un théorème fondamental de l'algèbre homologique. Cependant, ce dernier est toujours énoncé dans un cadre très général qu'il n'y a pas lieu de présenter ici. Nous en redonnons donc la démonstration, qui est assez simple. Les arguments essentiels sont la proposition précédente sur la commutation de R et Δ, et la caractérisation des chaînes fermées. Soit $U^r = I^r - R^r$. Les opérateurs P^r sont construits par récurrence. Soit $r = 1$. En prenant $P^1 \equiv 0^1$, la formule que doit vérifier P^2 devient: $U^1 = \Delta^1 P^2$. Or d'après la proposition précédente, $\Delta^0 U^1 = U^0 \Delta^0$. Ce dernier opérateur est donc nul, puisque $R^0 = I^0$. Pour tout simplexe de base t^1, la chaîne $U^1 t^1$ est donc fermée. C'est alors le bord d'une chaîne de dimension 2, que l'on prend pour définir $P^2(t^1)$. La construction de P^2 s'achève par sa prolongation aux simplexes quelconques par translation, puis aux chaînes, par sommation. Supposons maintenant construit les opérateurs P^s jusqu'au rang r. On cherche à construire P^{r+1} tel que $U^r - P^r\Delta^{r-1} = \Delta^r P^{r+1}$. Appliquons Δ^{r-1} au membre de gauche de cette égalité:

$$\Delta^{r-1}(U^r - P^r\Delta^{r-1}) = \Delta^{r-1}U^r - \Delta^{r-1}P^r\Delta^{r-1}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, c'est encore égal à

$$\Delta^{r-1}U^r - (U^{r-1} - P^{r-1}\Delta^{r-2})\Delta^{r-1}.$$

Or d'après la proposition précédente, $\Delta^{r-1}U^r - U^{r-1}\Delta^{r-1} \equiv 0^{r-1}$. L'opérateur ci-dessus est donc nul, puisque d'autre part $\Delta^{r-2}\Delta^{r-1} \equiv 0^{r-2}$. Pour tout simplexe de base t^r, la chaîne $(U^r - P^r\Delta^{r-1})(t^r)$ est donc fermée. C'est alors le bord d'une chaîne de dimension $r+1$, que l'on prend pour définir $P^{r+1}(t^r)$. On prolonge ensuite P^{r+1} par translation aux simplexes quelconques, puis par sommation aux chaînes, ce qui achève la récurrence.

Démonstration du théorème. — L'égalité du théorème s'obtient par passage à l'adjoint de celle du lemme. Il suffit de s'assurer que l'opérateur R^r admet pour adjoint, en tant qu'endomorphisme du groupe des chaînes de dimension r, l'endomorphisme S'_r du groupe des cochaînes $\mathcal{C}_r$. C'est une vérification purement formelle.

Remarque. — Ces trois premiers paragraphes se généralisent à une action de $\mathbf{Z}^d$ avec d quelconque. Les espaces de cochaînes géométriques sont définis aux degrés $n \leq d$ par $\mathcal{G}_n = M^{\binom{d}{n}}$, où $\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{d!}{n!(d-n)!}$. La définition des opérateurs d'accroissement extérieur d_n, qui s'inspire du calcul différentiel extérieur dans $\mathbf{R}^d$, peut être trouvée dans [10]. La notion de simplexe passe sans modification au cas de la dimension d. Les propriétés de l'intersection sont traitées en dimension quelconque dans [1].

4 Exemples

Soit g_r un cocycle de degré $r \geq 4$. Il est alors un cobord, puisque $S'_r = 0$ pour ces degrés. Comme cela a été évoqué dans la remarque précédente, ce fait s'adapte à $\mathbf{Z}^d$: tout cocycle de fonctions de M de degré $\geq d+1$ d'une action de $\mathbf{Z}^d$ est un cobord dans M. Pour une action de $\mathbf{Z}$, seuls les cocycles de degré 1 peuvent donc être non triviaux. Considérons alors le cas où M est l'espace des fonctions mesurables. Westman [15] a montré que les propriétés de cocycles et cobords mesurables sont conservées par isomorphisme orbital. Comme l'ont montré Feldman et Moore [7], la trivialité de la cohomologie mesurable de degré ≥ 2 des actions de $\mathbf{Z}$ se généralise alors aux cas des actions de $\mathbf{Z}^d$, grâce au théorème de Dye [6]. Ils obtiennent le résultat fondamental suivant:

Théorème. — Tout cocycle mesurable de degré ≥ 2 d'une action de $\mathbf{Z}^d$ est un cobord mesurable.

Le but de ce paragraphe est de montrer que ce résultat ne s'étend pas à la cohomologie L^p. Le premier exemple proposé est celui d'un cocycle engendré de degré 3 d'une action de $\mathbf{Z}^3$.

Exemple. — Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = (\mathcal{S}^1, \mathcal{B}, \lambda)$ le cercle unité muni de la mesure de Lebesgue, et T une action stationnaire de $\mathbf{Z}^3$ engendrée par trois rotations irrationnelles. Il existe une fonction $h \in L^2$ tel que le cocycle de degré 3 engendré par h ne soit pas cohomologue dans L^2 à 0.

Démonstration. — La cochaîne $S_3 h$ est toujours un cocycle. Supposons qu'elle soit aussi un cobord : $S_3 h = \nabla_2 g_2$. En prenant la somme sur le cube $[o] \otimes [\vec{u}_1][\vec{u}_2][\vec{u}_3]$, cette égalité devient $h = d_2(B)$, où B désigne la partie géométrique de g_2; soit encore $h \in \mathrm{Im}(d_2)$. L'exemple précédent peut donc se déduire du lemme suivant:

Lemme. — *Soit $M = L^2(\mathcal{S}^1, \lambda)$, et T une action stationnaire de $\mathbf{Z}^3$ engendrée par trois rotations irrationnelles. Il existe une fonction $h \in \mathcal{G}_3$ telle que l'équation $h = d_2 B$ n'ait pas de solution $B \in \mathcal{G}_2$.*

Démonstration. — Soit le système ergodique constitué du cercle S^1 muni de la mesure de Lebesgue λ, et de trois rotations T_k, d'angles respectifs $2\pi\vartheta_k$ avec ϑ_k irrationnel, $k = 1, 2, 3$. On cherche $h \in L^2$ tel que l'équation $h = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3$ n'ait pas de solution $(B_1, B_2, B_3) \in \mathcal{G}_{2,2}$ (c'est une conséquence du théorème de Feldman et Moore qu'il existe une solution mesurable. Voir aussi Lind [13] pour une démonstration directe). Les fonctions L^2 sur le cercle étant déterminées par leurs coefficients de Fourier, le problème est équivalent au suivant: trouver une suite $(c_q)_{q \in \mathbf{N}}$ de carré sommable telle que l'équation

$$c_q = \sum_{1 \leq k \leq 3} (e^{2i\pi\vartheta_k q} - 1) a_{k,q} \qquad (*)$$

n'ait pas de solution $(a_{k,q})_{q \in \mathbf{N}}$, $k = 1, 2, 3$ de carré sommable.

Remarque. — Il suffit bien sûr de prendre $c_0 \neq 0$, c'est-à-dire h d'espérance non nulle. Montrons cependant qu'il existe aussi h d'espérance nulle répondant à ce problème. Ainsi le cocycle engendré par h ne sera pas non plus cohomologue à un cocycle de fonctions constantes.

La preuve est fondée sur le théorème d'approximation simultanée des trois réels ϑ_k, par des rationnels $\dfrac{p_k}{q}$, $k = 1, 2, 3$ (Voir Koksma [12]) :

Théorème. — Il existe une constante κ telle que pour tout $N > 0$, il existe un entier $q \geq N$, et trois entiers p_k, $k = 1, 2, 3$ tels que $|q\vartheta_k - p_k| < \dfrac{\kappa}{q^{1/3}}$.

Soit $\mathcal{Q}$ un ensemble infini des entiers q donnés par ce théorème, pris de manière suffisamment espacés pour que la série $\displaystyle\sum_{q\in\mathcal{Q}} q^{-2/3}$ converge. Soit alors $(c_q)_{q\geq 0}$ la suite de coefficients définie par $c_q = q^{-1/3}$ si $q \in \mathcal{Q}$, et $= 0$ sinon. Elle est bien de carré sommable. Or l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $x \mapsto e^{ix}$ est contractante, donc pour tout $q \in \mathcal{Q}$, on a $|e^{2i\pi\vartheta_k q} - 1| < \dfrac{2\pi\kappa}{q^{1/3}}$, $k = 1, 2, 3$. L'équation $(*)$ à résoudre impose donc, aux rangs $q \in \mathcal{Q}$, l'inégalité

$$c_q < \frac{2\pi\kappa}{q^{1/3}} \sum_{k=1,2,3} |a_{k,q}|,$$

soit $1 < 2\pi\kappa \sum_k |a_{k,q}|$. Les suites $(a_{k,q})_{q\in\mathbf{N}}$, $k = 1, 2, 3$ ne peuvent donc pas être toutes de carré sommable, puis que l'une au moins ne tend pas vers 0. Ceci démontre le lemme et donne l'exemple cherché.

Pour finir ce paragraphe, montrons comment obtenir un exemple similaire au degré 2. L'argument essentiel est toujours le théorème de Koksma, cette fois pour deux irrationnels. On montre le résultat préliminaire suivant:

Lemme. — Soient V_1 et V_2 deux rotations irrationnelles de $\mathcal{S}^1$. Il existe une fonction $b \in L^2(\mathcal{S}^1)$ d'espérance nulle telle que l'équation $b = (V_1 - I)a_2 - (V_2 - I)a_1$ n'ait pas de solution $(a_1, a_2) \in L^2(\mathcal{S}^1) \times L^2(\mathcal{S}^1)$.

Démonstration. — La vitesse d'approximation de deux irrationnels simultanément est $|q\vartheta_k - p_k| < \dfrac{\kappa}{q^{1/2}}$. La démonstration du lemme est alors tout à fait analogue à celle faite précédemment pour trois rotations. Il suffit de choisir $\mathcal{Q}$ pour que la série $\displaystyle\sum_{q\in\mathcal{Q}} q^{-1}$ converge, et de poser $c_q = q^{-1/2}$ si $q \in \mathcal{Q}$, et $= 0$ sinon.

Soit alors V_3 une troisième rotation irrationnelle. Considérons le tore $\Omega = \mathbf{T}^2 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, muni des trois transformation $T_1 = V_1 \times I$, $T_2 = V_2 \times I$, et $T_3 = I \times V_3$. Soit $M = L^2(\mathbf{T}^2)$. L'exemple est un cocycle engendré S_2B de degré 2. Supposons qu'un tel cocycle soit un cobord: $S_2B = \nabla_1 g_1$. En considérant les sommes sur les trois carrés $[o] \otimes [\vec{u}_\ell][\vec{u}_m]$, avec $(\ell, m) = (2, 3)$, $(3, 1)$ ou $(1, 2)$, cette égalité devient $B = d_1A$, où A est la partie géométrique de g_1. Comme au degré 3, l'exemple se ramène donc à un problème sur les espaces $\mathcal{G}_r$:

Lemme. — *Il existe une fonction $B \in \mathcal{G}_2$ d'espérance nulle vérifiant $d_2B = 0$, telle que l'équation $d_1A = B$ n'ait pas de solution $A \in \mathcal{G}_1$.*

Démonstration. — Soit $B = (B_1, B_2, B_3)$ avec $B_1 = B_2 = 0$ et $B_3(\omega_1, \omega_2) = b(\omega_1)$, où b est la fonction donnée par le lemme précédent. Comme B_3 ne dépend que de la première coordonnée, elle est clairement invariante par T_3. On a donc bien $\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0$. D'autre part l'équation $d_1A = B$ implique (entre autres) $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B_3$. Soit A une solution dans $L^2(\mathbf{T}^2)$. Alors, pour presque tout ω_2, les fonctions $a_1(\omega_1) = A_1(\omega_1, \omega_2)$ et $a_2(\omega_1) = A_2(\omega_1, \omega_2)$ sont dans $L^2(\mathcal{S}^1)$, et vérifient $b = (V_1 - I)a_2 - (V_2 - I)a_1$, ce qui est en contradiction avec le lemme précédent. Ceci démontre le lemme et donne l'exemple annoncé.

Bibliographie

[1] P. Alexandrov. *Introduction à la théorie homologique de la dimension.* Édition Mir (1977).

[2] H. Cartan & S.Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton University Press (1956).

[3] D. Boivin & Y. Derriennic. The ergodic theorem for additive cocycles of $\mathbf{Z}^d$ or $\mathbf{R}^d$. *Ergod. Theory & Dynamical systems.* Vol 11, 1991, p. 19-39.

[4] J. Depauw. Théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré deux. *C. R. Acad. Sci.* Paris, t. 325, Séries I, 1997, p. 87-90.

[5] J. Depauw. Flux moyen d'un courant électrique dans un réseau aléatoire stationnaire de résistances. *Ann. Inst. Henri Poincaré.* Vol. 35, 1999, p. 355-370.

[6] H. Dye. On groups of measure preserving transformations, I. *Amer. J. of Math.* Vol. 81, 1959, p. 119-159.

[7] J. Feldman & C.C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebra.I. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 234, (1977), p. 289-324.

[8] R. Godement. *Théorie des faisceaux.* Publication de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann (1964).

[9] A. Katok. The special representation theorem for multi-dimensional group actions. *Astérisque.* Vol. 49, 1977, p. 117-140.

[10] A. Katok & S. Katok. Higher cohomology for abelian groups of toral automorphisms. *Ergod. Theory and Dynamical Systems.* Vol. 15, 1995, p. 569-592.

[11] S.M. Koslov. The method of averaging and walks in inhomogeneous environments. *Russian Math. Surveys.* Vol. 40, 1985, p. 73-145.

[12] J.F. Koksma. *Diophantische approximationen.* Springer (1936).

[13] D.A. Lind. Products of coboundaries for commuting nonsingular automorphisms. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.* Gebiete 43, 1978, p. 135-139.

[14] S. Mac Lane. *Homology.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 114. Springer Verlag (1963).

[15] J. Westman. Cohomology for ergodic actions of countable groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol 30, 1971, p. 318-320.

[16] N. Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math. J.* Vol 5, 1939, p. 1-18.