Conductivité d'un réseau aléatoire stationnaire de résistances.

Jérôme Depauw
Université Rabelais, faculté des Sciences, Parc de Grandmont, 37200 Tours.
Adresse électronique: depauw@univ-tours.fr
Fax : 02.47.36.70.68

Résumé. Dans une Note précédente (voir [3]) le théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 2 d'une action de $\mathbf{Z}^3$ *a été démontré avec l'hypothèse d'intégrabilité suffisante* L_p *pour un* $p > 2$*. On montre ici que le flux d'un courant électrique dans un réseau aléatoire cubique stationnaire de résistances défini un exemple de cocycle de degré 2, auquel s'applique ce théorème.*

Conductivity of a stationary electrical network.

Abstract. In a preceding Note (See [3]) the pointwise ergodic theorem for cocycle of degree 2 of a $\mathbf{Z}^3$ *action was proved with the hypothesis of* L_p *integrability for one* $p > 2$*. We prove here that the current through surfaces in a random electrical network defines a cocycle of degree 2, to which this theorem can be applied.*

Introduction

Dans un réseau fini de résistances, un régime électrique unique s'établit quand une différence de potentiel est fixée entre deux points. Le rapport du carré de l'intensité à la puissance dissipée est la conductance du réseau. Considérons le cas de n^3 résistances montées sur un cube de coté n, c'est-à-dire sur n^2 segments verticaux reliés en parallèle, et chacun composé de n résistances reliées en série. La conductance $\rho(n)$ est donc égale à $\rho(n) = \dfrac{F(n)^2}{P(n)}$ où $F(n)$ désigne l'intensité du courant traversant le circuit, c'est-à-dire le flux du courant à travers une surface carrée horizontale de coté n interceptant tous les segments, et $P(n)$ désigne la puissance dissipée dans le réseau, c'est-à-dire dans le cube de coté n le contenant. Si de plus les n^3 résistances sont identiques, de conductance ρ, un calcul simple montre que $\rho(n) = n\rho$. Réciproquement la connaissance du flux et de la puissance dissipée dans l'ensemble du réseau permet donc de retrouver la conductance de chaque arête: $\rho = \dfrac{F(n)^2}{nP(n)}$.

Dans un réseau infini le problème de l'existence et de l'unicité d'un régime électrique est plus difficile (voir [4] et [12]). Il a cependant une solution connue pour un réseau cubique aléatoire stationnaire de résistances. Supposons donné un tel réseau avec l'hypothèse que les résistances, qui sont donc maintenant des variables aléatoires positives indexées par les arêtes de $\mathbf{Z}^3$, de loi conjointe invariante par translation, sont bornées inférieurement et supérieurement. Alors, pour une espérance donnée de l'accroissement du potentiel le long d'une arête, Golden et Papanicolaou montrent par la méthode de projection orthogonale l'existence de courants dans les arêtes qui sont des variables de loi conjointe invariante par translation, et de carré intégrable. La notion de conductance moyenne par arête s'appuie sur la formule précédente : Si $F(n)$ désigne maintenant le flux du courant stationnaire, toujours à travers une surface carrée horizontale de coté n, et $P(n)$ désigne la puissance dissipée par ce courant stationnaire, toujours à l'intérieur d'un cube de coté n, alors la conductance moyenne par arête est définie par $\rho_{\text{moyenne}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(n)^2}{nP(n)}$. Ceci est encore égal à $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(F(n)/n^2)^2}{P(n)/n^3}$. D'après le théorème ergodique ponctuel pour les actions de $\mathbf{Z}^2$ (respectivement de $\mathbf{Z}^3$), le terme dont le carré apparaît au numérateur (respectivement le dénominateur) admet presque sûrement une limite appelée flux moyen (respectivement puissance moyenne). Ces expressions se généralisent au cas de surfaces et de parallélogrammes de directions quelconques. Une conductance moyenne directionnelle apparaît alors lorsque les limites sont bien définies. Elle représente un phénomène volumique, appelé conductivité, lorsque les convergences ont lieu uniformément par rapport aux directions.

La puissance dissipée dans chaque arête est le rapport du carré du courant traversant cette arête à sa conductance. D'après l'intégrabilité du carré du courant de Golden et Papanicolaou, et l'hypothèse de bornitude sur les conductances, c'est donc une variable aléatoire intégrable. La version du théorème ergodique ponctuel pour les actions de $\mathbf{Z}^3$ donnant l'uniformité de la convergence par rapport aux directions du parallélogramme (à condition que ce dernier ne s'aplatisse pas trop), s'applique alors, et donne l'existence de la puissance moyenne limite.

L'objet de cet article est de montrer la convergence uniforme par rapport à la direction de la surface, dans le cas du flux. Suivant les lois de l'électricité, le flux du courant à travers une surface simple de $\mathbf{R}^3$ ne dépend que du bord de la surface. Ce courant engendre donc un cocycle de degré 2. Il faut alors vérifier que le théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 2 peut être appliqué à cet exemple. L'essentiel du travail consiste à vérifier, par une méthode proche de celle de Boivin [1] et Koslov [6], que le courant est de puissance p-ième intégrable pour un $p > 2$. La méthode de la projection orthogonale ne donne a priori que la propriété de carré intégrable.

Ainsi le théorème ergodique pour cocycle de degré 2 a pour corollaire que le flux moyen du courant à travers une surface triangulaire ou losange de $\mathbf{R}^3$ a presque sûrement une limite quand son diamètre tend vers l'infini, uniformément par rapport à sa direction.

Afin de simplifier l'exposé, l'article est divisé en deux paragraphes. Le plus gros des calculs est renvoyé dans le second, qui constitue une sorte d'annexe indépendante sous la forme de l'étude d'un opérateur. Cet opérateur peut avoir des applications autres que celle considérée ici. En effet, il est l'analogue, pour la théorie ergodique, de l'opérateur de Riesz du calcul intégral.

1 Flux moyen.

1.1 Présentation du résultat.

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité et $(T_j)_{1\leq j\leq 3}$ deux automorphismes commutant, engendrant une action ergodique stationnaire de $\mathbf{Z}^3$ notée $T : x = (x_1, x_2, x_3) \to T_x = T_1^{x_1} T_2^{x_2} T_3^{x_3}$. La base canonique de $\mathbf{R}^3$ est notée (e_1, e_2, e_3). Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in]0, 1[^3$ tel que l'équation $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 = k_0$ n'ait pas de solution entière. Considérons le réseau $\mathcal{R} = \mathbf{Z}^3 + (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Une fonction $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ définie sur le système dynamique $(\Omega, \mathcal{B}, m, T)$ de $\mathbf{Z}^3$, à valeurs dans $\mathbf{R}^3_+$, définit un réseau de conductances aléatoires stationnaires, $\rho_j(T_x\omega)$ représentant la conductance de l'arête $[x + \alpha - e_j, x + \alpha]$ de $\mathcal{R}$, pour l'état aléatoire ω. Un régime électrique stationnaire est une fonction $U = (U_1, U_2, U_3)$ telle que $U_j(T_x\omega)$ représente la différence de potentiel entre les sommets de la même arête; $B_j(T_x\omega) = (\rho_j U_j)(T_x\omega)$ est alors le courant dans cette arête. Remarquons que si $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ vérifient $\det(e_j, e_k, e_l) = \pm 1$ alors $B_j(T_x\omega)$ est aussi, au signe près, le flux du courant à travers la surface carrée de sommets $(x, x + e_k, x + e_k + e_l, x + e_l)$. En posant les opérateurs $\partial_j = T_j - Id$ et $\partial_j^* = T_j^{-1} - Id$, les équations de l'électricité s'écrivent alors:

$$\begin{array}{lrcll} \text{Lois des mailles} & \partial_j^* U_k & = & \partial_k^* U_j & \text{pour } j \neq k \in \{1,2,3\}; \\ \text{Loi des nœuds} & \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j B_j & = & 0; & \\ \text{Loi de Ohm} & \rho_j U_j & = & B_j & \text{pour } j \in \{1,2,3\}. \end{array}$$

Les lois des mailles expriment la nullité de l'accroissement du potentiel le long des chemins fermés de sommets $(\alpha, \alpha - e_j, \alpha - e_j - e_k, \alpha - e_k, \alpha)$; la loi des nœuds que la somme des courants arrivant au nœud α est nulle. Pour obtenir un régime électrique unique et non nul, on impose l'espérance des différences de potentiel U_j. Le problème revient alors à résoudre le système suivant, d'inconnue (U_j) :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcll} E(U_j) & = & u_j & \text{pour } j \in \{1,2,3\}; \\ \partial_j^* U_k & = & \partial_k^* U_j & \text{pour } j \neq k \in \{1,2,3\}; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j(\rho_j U_j) & = & 0. & \end{array} \right.$$

où les u_j sont des réels donnés, et E désigne l'espérance par rapport à m. Le théorème suivant de Golden et Papanicolaou [5] donne l'existence de solution L_2 :

Théorème. – *Si la conductance ρ vérifie pour tout $1 \leq j \leq 3$, $a < \rho_j < b$ avec a et b deux constantes > 0, alors le système $(\mathcal{S})$ a une solution unique $(U_1, U_2, U_3) \in (L_2(\Omega, m))^3$.*

Ce résultat est renforcé par le théorème suivant

THÉORÈME 1. – *Il existe $p > 2$ tel que la solution L_2 du théorème précédent soit dans $(L_p(\Omega, m))^3$ (p dépend des constantes a et b).*

c'est analogue du résultat donné par Boivin [1] pour $\mathbf{Z}^2$. On peut associer au courant (B_j) son « flux » à travers des surfaces planes:

DÉFINITION. – Le flux $(FB)(\omega, x, y)$ du courant (B_j) à travers la surface triangulaire de sommets $(0, x, x+y)$ dans l'état ω est défini par $(FB)(\omega, x, y) = \sum_{(j,z)} \eta_j B_j(T_z\omega)$, la somme portant sur les $(j, z) \in \{1, 2, 3\} \times \mathbf{Z}^3$ tels que le segment $[z + \alpha - e_j, z + \alpha]$ traverse la surface délimitée par le triangle de sommets $(0, x, x + y)$; $\eta_j = \pm 1$ suivant le signe du déterminant de (x, y, e_j).

Le flux entrant dans une surface fermée est nul. Avec la surface du tétraèdre de sommets $(\alpha, x + \alpha, x + y + \alpha, x + y + z + \alpha)$ on obtient donc

$$0 = (FB)(\omega, x, y) + (FB)(\omega, x + y, z) - (FB)(\omega, x, y + z) - (FB)(T_x\omega, y, z).$$

La fonction FB est donc un cocycle de degré 2.

Pour $x, y \in \mathbf{Z}^3$, $\|x\|$, $x.y$, et $x \wedge y$ désignent respectivement la norme, le produit scalaire et vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Pour $\theta \in]0, \pi/2[$, $\mathcal{T}_\theta$ désigne l'ensemble des couples (x, y) tels que le triangle de sommets $(0, x, x + y)$ ait ses trois angles $> \theta$. L'existence presque sûre du flux moyen du courant est alors donnée par le théorème ergodique suivant :

COROLLAIRE. – *Soit $\theta \in]0, \pi/2[$. Pour presque tout $\omega \in \Omega$*

$$\mathit{lim}_{\substack{x,y\to\infty \\ (x,y)\in\mathcal{T}_\theta}} \left(\frac{2}{\|x \wedge y\|}(FB)(\omega, x, y) - \frac{x \wedge y}{\|x \wedge y\|}.E(B) \right) = 0,$$

le vecteur $E(B)$ étant le vecteur des espérances $E(B) = (E(B_j))_{1\leq j\leq 3}$.

REMARQUE. – La quantité $\frac{\|x\wedge y\|}{2}$ et le vecteur $\frac{x\wedge y}{\|x\wedge y\|}$ sont respectivement l'aire et la normale du triangle $(0, x, x + y)$.

Cette convergence est une conséquence du théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré 2, qui s'applique grâce à l'intégrabilité L_p, pour un $p > 2$ (voir la note [3]). Celle-ci est donnée par le théorème 1. La convergence pour la norme L_2 est aussi vérifiée, grâce à l'intégrabilité L_2 de B et au théorème ergodique correspondant.

1.2 Démonstration du théorème 1.

Soit $p > 1$. Notons L_p l'espace $L_p(\Omega, m)$, et $(L_p)^3 = L_p \times L_p \times L_p$ muni de la norme

$$\|(h_j)_{1\leq j\leq 3}\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{3} \|h_j\|_p^p\Big)^{1/p}.$$

On pose aussi $\mathcal{E}_p^3$ l'adhérence dans $(L_p)^3$ de l'espace des fonctions de la forme $(\partial_1^* f, \partial_2^* f, \partial_3^* f)$ avec $f \in L_\infty$. La résolution de $(\mathcal{S})$ passe par la résolution d'un système préliminaire « à coefficients constants et avec second membre ». Soit $(h_1, h_2, h_3) \in (L_p)^3$. Considérons le système $(\mathcal{S}')$ d'inconnue $(V_1, V_2, V_3) \in (L_p)^3$:

$$(\mathcal{S}')\left\{\begin{array}{rcll} E(V_j) & = & 0 & j \in \{1,2,3\} \quad (1)\\ \partial_j^* V_k & = & \partial_k^* V_j & j \neq k \in \{1,2,3\} \quad (2)\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j V_j & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j h_j & \quad (3) \end{array}\right.$$

La proposition suivante, de Boivin et Derriennic ([2] Proposition 3, en remplaçant T_j par T_j^{-1} et L_1 par L_p, ce qui ne change pas la démonstration) donne l'espace des solutions des équations (1) et (2).

Proposition. – On a l'égalité $\mathcal{E}_p^3 = \{(V_1, V_2, V_3) \in (L_p)^3 \quad \textit{vérifiant (1) et (2)}\}$

La résolution de $(\mathcal{S}')$ se ramène alors à la résolution de l'équation (3) dans $\mathcal{E}_p^3$. On a la proposition suivante:

PROPOSITION 1. – *L'équation (3) a une unique solution dans $\mathcal{E}_p^3$, et l'opérateur G défini par $G(h_1, h_2, h_3) = (V_1, V_2, V_3)$ est continu pour la norme de $(L_p)^3$.*

Unicité. Soit (V_1, V_2, V_3) et (V_1', V_2', V_3') deux solutions de l'équation (3) dans $\mathcal{E}_p^3$. Soit $W_j = V_j - V_j'$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{rcll} E(W_j) & = & 0 & j \in \{1,2,3\};\\ \partial_j^* W_k & = & \partial_k^* W_j & j \neq k \in \{1,2,3\};\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \partial_j W_j & = & 0. & \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations donnent $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} \partial_j \partial_j^* W_k = 0$ pour tout $k = 1, 2, 3$, c'est à dire $W_k = \dfrac{1}{6} \displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} (T_j W_k + T_j^{-1} W_k)$. Or les opérateurs T_j et T_j^{-1} sont de norme 1, et la boule unité de L_p est strictement convexe, donc W_k est invariant par T; elle est donc constante par ergodicité, puis nulle d'après la première équation. Ceci montre l'unicité.

Existence. L'existence est démontrée dans le paragraphe suivant. Elle est en effet une conséquence de l'étude de l'opérateur « de Riesz » qui y est développée. Ceci qui achève la preuve de la proposition 1.

On a alors la proposition suivante:

Proposition 2. – *La norme $c(p)$ de l'opérateur G dans $(L_p)^3$ vérifie $c(2) = 1$ et $\lim_{p\to 2} c(p) = 1$.*

Remarque. – Il est évident que $c(p) \geq 1$ car $\mathcal{E}_p^3$ est un ensemble de points fixes de G.

Démonstration de la proposition 2. La première assertion relève de l'analyse hilbertienne. En effet l'espace $(L_2)^3$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle V, V'\rangle = \sum_{j=1}^{3} E(V_j.V_j')$, correspondant à la norme définie sur $(L_p)^3$ avec $p = 2$. Soit $h \in (L_2)^3$ et $V = G(h)$. Alors V et $h - V$ sont orthogonales; en effet $V \in \mathcal{E}_p^3$ donc il existe une suite de fonctions $f_n \in L_2$ telle que $(\partial_1^* f_n, \partial_2^* f_n, \partial_3^* f_n)$ converge vers V dans $(L_2)^3$. Or $\langle(\partial_j^* f_n)_{1\leq j\leq 3}, h - V\rangle$ est égal à

$$\sum_{j=1}^{3} E(\partial_j^* f_n.(h_j - V_j)) = E\Big(f_n.(\sum_{j=1}^{3} \partial_j(h_j - V_j))\Big),$$

ce qui est nul d'après l'équation (3). En laissant tendre n vers l'infini, on obtient bien $\langle V, h - V\rangle = 0$. Il en découle d'après le théorème de Pythagore $\|h\|_2^2 = \|h - V\|_2^2 + \|V\|_2^2 \geq \|V\|_2^2$, c'est-à-dire $\|h\|_2 \geq \|G(h)\|_2$. Ceci montre que $c(2) = 1$. D'après le théorème de convexité de Riesz (Voir Stein & Weiss [10]), la fonction qui à p associe $c(p)$ est convexe donc continue sur $]1, +\infty[$, ce qui montre la proposition 2.

En faisant le changement de variable $V_j = U_j - u_j$, le système $(\mathcal{S})$ devient

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{rcll} E(V_j) & = & 0 & j \in \{1,2,3\} \quad (1)\\ \partial_j^* V_k & = & \partial_k^* V_j & j \neq k \in \{1,2,3\} \quad (2)\\ \sum_{j=1}^{3} \partial_j V_j & = & \sum_{j=1}^{3} \partial_j\big((1 - \frac{\rho_j}{b})V_j - \frac{\rho_j}{b}u_j\big) & \quad (3) \end{array}\right.$$

soit encore $(V_1, V_2, V_3) = G\Big(\big((1 - \frac{\rho_j}{b})V_j - \frac{\rho_j}{b}u_j\big)_{1\leq j\leq 3}\Big)$. La solution s'obtient par approximations successives. Partant de $V^{(0)} = (V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, V_3^{(0)}) \in (L_p)^3$ quelconque, considérons la suite $V^{(n)} = (V_1^{(n)}, V_2^{(n)}, V_3^{(n)})$ de $(L_p)^3$ définie par récurrence par

$$V^{(n+1)} = G\Big(\big((1 - \frac{\rho_j}{b})V_j^{(n)} - \frac{\rho_j}{b}u_j\big)_{1\leq j\leq 3}\Big).$$

On a alors, d'après l'hypothèse sur les bornes de ρ,

$$\|V^{(n+1)} - V^{(n)}\|_p \leq c(p)(1-\frac{a}{b})\|V^{(n)} - V^{(n-1)}\|_p.$$

Si p est tel que $c(p)(1-\frac{a}{b}) < 1$, la suite $V^{(n)}$ converge vers une limite indépendante de $V^{(0)}$, qui est donc l'unique solution de $(\mathcal{S})$. C'est le cas si $p = 2$ (car $c(2) = 1$) et pour $p > 2$ assez proche de 2 (car $\lim_{2^+} c = 1$). L'inclusion $L_p \subset L_2$ montre que l'on retrouve dans ce cas la solution L_2, ce qui démontre le théorème 1.

2 Opérateur « de Riesz ».

Dans le cas simple d'un second membre (h_1, h_2, h_3) tel que $h_j = \sum_{l=1}^3 \partial_l^* \partial_l g_j$ avec $g_j \in L_\infty$, l'équation (3) du paragraphe précédent admet dans l'espace $\mathcal{E}_p^3$ la solution immédiate $(V_1, V_2, V_3) = (\partial_1^* f, \partial_2^* f, \partial_3^* f)$ avec $f = \displaystyle\sum_{k=1}^3 \partial_k g_k$. En notant $\Delta = \dfrac{-1}{6}\displaystyle\sum_{l=1}^3 \partial_l^* \partial_l$, et en utilisant l'identité formelle $-\Delta = \sqrt{-\Delta}\sqrt{-\Delta}$, cette solution s'écrit $V_j = \dfrac{\partial_j^*}{\sqrt{-6\Delta}}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^3 \dfrac{\partial_k}{\sqrt{-6\Delta}} h_k\Big)$. L'opérateur $R_j = \dfrac{\partial_j}{\sqrt{-6\Delta}}$ est l'analogue, dans le cadre d'une action ergodique de $\mathbf{Z}^3$, de l'opérateur de Riesz de $\mathbf{R}^3$ du calcul intégral. L'objet de ce paragraphe, qui constitue une sorte d'annexe indépendante du précédent du point de vue des démonstrations, est d'en montrer la continuité dans L_p pour $p > 1$, et les propriétés élémentaires nécessaires à la résolution de l'équation (3) dans $\mathcal{E}_p^3$.

Soit p la fonction de $\mathbf{Z}^3$ dans $\mathbf{R}$ suivante

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad x = 0; \\ 1/12 & \text{si} \quad \|x\| = 1; \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| > 1. \end{cases}$$

Soit P l'opérateur défini sur L_p par $Pf(\omega) = \displaystyle\sum_{x \in \mathbf{Z}^3} p(x) f(T_{-x}\omega)$. On a alors $P^n f(\omega) = \displaystyle\sum_{x \in \mathbf{Z}^3} p_n(x) f(T_{-x}\omega)$ où p_n est définie par récurrence par $p_1 = p$ et la relation de convolution $p_{n+1} = p_n \star p_1$. Par convention p_0 est la fonction δ élément neutre pour la convolution: $\delta(x) = 1$ si $x = 0$ et 0 sinon. Comme $-\Delta = 2(Id - P)$, la définition de R_j peut se faire grâce à l'analogie avec le développement en série entière $\frac{1}{\sqrt{1-s}} = \sum_{n\geq 0} a_n s^n$ où $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Le calcul formel se pose de la manière suivante:

$$\frac{\partial_j}{\sqrt{-6\Delta}} h = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{Id-P}} \partial_j h = \frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{n\geq 0} a_n P^n(\partial_j h).$$

Or P^n s'exprime à l'aide d'une somme en x, donc en l'intervertissant avec la somme en n on obtient $R_j h(\omega) = \sum_{x\in \mathbf{Z}^3} r_j(x) h(T_{-x}\omega)$ avec

$$r_j(x) = \frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{n\geq 0} a_n (p_n(x+e_j) - p_n(x)).$$

Pour légitimer ce calcul formel, notamment la convergence des séries, on utilise des estimations de $p_n(x)$. Celles-ci s'obtiennent à l'aide d'un théorème limite local. En effet, puisque $\sum_{x\in \mathbf{Z}^3} p(x) = 1$, la fonction p est associée à une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^3$. C'est le sujet du paragraphe suivant.

2.1 Estimations du noyau r_j.

Notons ∇_j l'opérateur défini sur les fonctions de $\mathbf{Z}^3$ dans $\mathbf{R}$ par $\nabla_j q(x) = q(x+e_j) - q(x)$. Le théorème limite local est énoncé ci-dessous dans une forme proche de celle de Lawler [7]. Il donne des estimations de $\nabla_j p$ et de ses accroissements. Il faut ensuite les multiplier par $a_n/\sqrt{12}$, puis les sommer en n, afin d'obtenir une estimation de $r_j(x)$ et de ses accroissements.

Théorème (théorème limite local). – Pour n tendant vers l'infini, uniformément en x

$$\begin{aligned}
\left|\nabla_j p_n(x) - \left(\frac{6}{2\pi n}\right)^{3/2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\right| &= O(\sqrt{n}^{-6}); \\
&= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}^{-4}); \\
\left|\nabla_l \nabla_j p_n(x) - \left(\frac{6}{2\pi n}\right)^{3/2} \nabla_l \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\right| &= O(\sqrt{n}^{-7}); \\
&= \|x\|^{-2} O(\sqrt{n}^{-5}).
\end{aligned}$$

Démonstration. Le théorème limite locale de Lawler ([7] théorème 1.2.1) est énoncé dans le cas de la marche aléatoire équiprobable sur les plus proches voisins. Celle-ci est associée à la fonction p' définie par $p'(x) = \frac{1}{6}$ si $\|x\| = 1$ et 0 sinon. Des conditions de parité apparaissent liées au fait qu'elle ne charge au temps n que les points x dont la sommes des coordonnées à même parité que n. La démonstration peut se reprendre pour la marche associée à p, à partir de l'expression de $p_n(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]^3} \hat{p}^n(\theta)e^{-ix.\theta}d\theta$ où $\hat{p}(\theta)$ désigne la valeur de la transformée de Fourier de p au point $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$:

$$\hat{p}(\theta) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^3} p(x)e^{ix.\theta} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\cos\theta_j\Big).$$

De plus, comme $|\hat{p}(\theta)| = 1$ si et seulement si les coordonnées θ_j sont multiples de 2π, le théorème devient vrai sans condition de parité. Sur ces questions d'apériodicité, voir les propositions P8 et P9 page 75 du livre de Spitzer [8]. Pour les deux dernières inégalités, Lawler ([7]) ne considère que le cas $j = l$ mais la démonstration convient aussi pour $j \neq l$.

En multipliant par $\frac{a_n}{\sqrt{12}} \sim \frac{1}{\sqrt{12\pi n}}$ les estimations du théorème limite local, celles-ci deviennent

Corollaire. – *Pour n tendant vers l'infini, uniformément en x*

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{a_n}{\sqrt{12}}\nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2}\nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\Big| &= O(\sqrt{n}^{-7});\\
&= \|x\|^{-2}O(\sqrt{n}^{-5});\\
\Big|\frac{a_n}{\sqrt{12}}\nabla_l\nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2}\nabla_l\nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\Big| &= O(\sqrt{n}^{-8});\\
&= \|x\|^{-2}O(\sqrt{n}^{-6}).
\end{aligned}$$

Démonstration. La formule de Stirling $n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n(1+O(\dfrac{1}{n}))$ s'applique à a_n: $a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + O(\frac{1}{n}))$. De plus, pour $n > 1$, la formule des accroissements finis s'écrit

$$\begin{aligned}
\Big|\nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\Big| &< \sup_{\|x-y\|\leq 1}\Big(\frac{6\|y\|}{n}e^{-\frac{6\|y\|^2}{2n}}\Big);\\
\Big|\nabla_l\nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\Big| &< \sup_{\|x-y\|\leq\sqrt{2}}\Big(\big(\frac{6}{n} + \frac{36\|y\|^2}{n^2}\big)e^{-\frac{6\|y\|^2}{2n}}\Big).
\end{aligned}$$

On a donc, pour n tendant vers l'infini, uniformément en x

$$\begin{aligned}
\Big|\nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\Big| &= O(\frac{1}{\sqrt{n}}) & & & \Big|\nabla_l\nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}}\Big| &= O(\frac{1}{n})\\
& & \text{et} & & &\\
\text{''} &= \|x\|^{-2}O(\sqrt{n}) & & & \text{''} &= \|x\|^{-2}O(1).
\end{aligned}$$

Les estimations annoncées dans le corollaire se déduisent alors du théorème précédent.

Remarque. – La multiplication par $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ a fait gagner « un cran » dans les estimations. Ainsi, le corollaire ci-dessus, comme les résultats qui suivent, sont à mettre en parallèle avec les résultats analogues énoncés dans [7], mais dans le cas de la dimension $d = 4$.

En sommant en n les égalités du corollaire, on obtient les estimations suivantes:

Lemme. – pour tout $\alpha < 4$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|x\|\to+\infty} \|x\|^{\alpha+1} \sum_{n\geq 0} \Big| \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \Big| &= 0; \\
\lim_{\|x\|\to+\infty} \|x\|^{\alpha+2} \sum_{n\geq 0} \Big| \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_l \nabla_j p_n(x) - \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_l \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} \Big| &= 0.
\end{aligned}
$$

Démonstration. Même démonstration que le lemme 1.5.2 dans [7], à partir du corollaire ci-dessus.

Le théorème 1.5.5 de Lawler [7] compare les fonctions de Green de $\mathbf{R}^d$ et de $\mathbf{Z}^d$. Le théorème suivant est l'analogue pour le noyau de Riesz.

Théorème 2. – *Soit $\bar{r}_j$ le noyau de Riesz de $\mathbf{R}^3$ défini par $\bar{r}_j(x) = -\frac{x_j}{\pi^2 \|x\|^4}$. Alors, pour $\|x\|$ tendant vers l'infini*

$$
\begin{aligned}
\big| r_j(x) - \bar{r}_j(x) \big| &= O\big(\frac{1}{\|x\|^4}\big); \\
\big| \nabla_l r_j(x) - \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{r}_j(x) \big| &= O\big(\frac{1}{\|x\|^5}\big).
\end{aligned}
$$

Démonstration. D'après le lemme précédent,

$$
r_j(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{3}{2(\pi n)^2} \nabla_j e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} + o\big(\frac{1}{\|x\|^4}\big).
$$

Comme dans la démonstration du théorème 1.5.5 de [7], une application de la formule de Taylor-Young permet d'écrire

$$
r_j(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{3}{2(\pi n)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-\frac{6\|x\|^2}{2n}} + O\big(\frac{1}{\|x\|^4}\big).
$$

Par un calcul de somme de Riemann, cette expression devient

$$
\int_{t\geq 0} \frac{3}{2(\pi t)^2} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-\frac{6\|x\|^2}{2t}} dt + O\big(\frac{1}{\|x\|^4}\big).
$$

L'intégrale se calcule par changement de variable, d'où

$$r_j(x) = \frac{-x_j}{\pi^2\|x\|^4} + O\big(\frac{1}{\|x\|^4}\big).$$

Par un calcul analogue

$$\begin{aligned}\nabla_l r_j(x) &= \int_{t\geq 0} \frac{3}{2(\pi t)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} e^{-\frac{6\|x\|^2}{2t}} dt + O\big(\frac{1}{\|x\|^5}\big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{-x_j}{\pi^2\|x\|^4} + O\big(\frac{1}{\|x\|^5}\big),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.2 Continuité et propriétés de l'opérateur.

Les estimations du théorème 2 sont à la base du théorème suivant

Théorème 3. – *Soit $p > 1$. L'opérateur R_j défini sur l'espace des fonctions h de la forme $h = \Delta g$ pour $g \in L_\infty$ par*

$$R_j h(\omega) = \lim_{M\to+\infty} \sum_{x\in[-M,M]^3} r_j(x) h(T_{-x}\omega)$$

est continu pour la norme de L_p.

Démonstration. Considérons d'abord le cas des fonctions de la forme $h = \partial_l g$ pour $g \in L_\infty$. Avec la transformation d'Abel, la somme ci-dessus devient

$$\sum_{\substack{x\in C_M \\ -M\leq x_l\leq M-1}} \nabla_l r_j(x) g(T_{-x}\omega) - \sum_{\substack{x\in C_M \\ x_l=M}} r_j(x) g(T_{-x}\omega) + \sum_{\substack{x\in C_M \\ x_l=-M}} r_j(x) g(T_{-x+e_l}\omega)$$

où $C_M = [-M, M]^3$. D'après le théorème A, $r_j(x) = O(\|x\|^{-3})$ et $\nabla_l r_j(x) = O(\|x\|^{-4})$, donc cette expression converge dans L_∞ quand M tend vers l'infini, vers $\sum_{x\in\mathbf{Z}^3} \nabla_l r_j(x) g(T_{-x}\omega)$ qui est une série normalement convergente. Ceci montre que la limite de l'énoncé est bien définie. La continuité de R_j découle du principe de transfert (voir [11]), appliqué à la version discrète suivante du théorème classique sur la continuité de l'opérateur de Riesz.

Théorème. – Soit $p > 1$. L'opérateur de Riesz discret $\mathcal{R}_j$ défini sur $L_1(\mathbf{Z}^3)$ par $\mathcal{R}_j q = r_j \star q$ est continu pour la norme de $L_p(\mathbf{Z}^3)$.

Démonstration. Même démonstration que pour l'opérateur de Riesz de $\mathbf{R}^3$, à partir des faits suivant:

$$r_j \in L_2(\mathbf{Z}^3); \quad \nabla_l r_j(x) = O(\|x\|^{-4}); \quad \hat{r}_j \text{ est bornée}$$

(voir le livre de Stein [9] page 29). Les deux premières conditions découlent du théorème 2. La transformée de Fourier de r_j se calcule à partir de celle de p

$$\begin{aligned}\hat{r}_j(\theta) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{12}}(e^{i\theta_j}-1)a_n\hat{p}^n(\theta) = \frac{e^{i\theta_j}-1}{\sqrt{12}\sqrt{1-\hat{p}(\theta)}};\\ &= \frac{e^{i\theta_j}-1}{\sqrt{\sum_{1\leq l\leq 3}|e^{i\theta_l}-1|^2}},\end{aligned}$$

ce qui montre quelle est bornée par 1.

Le principe de transfert s'applique de la manière suivante. Soit $h=\partial_l g$ avec $g\in L_\infty$. Pour $M,N>0$, et $\omega\in\Omega$, on pose l'opérateur R_j^M défini par

$$R_j^M h(\omega)=\sum_{x\in C_M} r_j(x)h(T_{-x}\omega)$$

et la fonction $h_{M+N,\omega}$ défini sur $\mathbf{Z}^3$ par

$$h_{M+N,\omega}(x)=\begin{cases} h(T_x\omega) & \text{si } x\in C_{M+N}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Une application de la transformation d'Abel analogue à la précédente montre que, pour tout $x\in C_N$, $|\mathcal{R}_j h_{M+N,\omega}(x)-R_j^M h(T_x\omega)|$ est majoré par

$$\|g\|_\infty\Big(\sum_{y\notin C_{M-1}}|\nabla_l r_j(y)|+\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^3\\ y_l=\pm M}}|r_j(y)|+\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^3\\ y_l=x_l\pm(M+N)}}|r_j(y)|\Big).$$

D'après le théorème A, cette majoration est du type $\|g\|_\infty O(\frac{1}{M})$, uniformément en N et $x\in C_N$. En prenant la moyenne des puissances p-ième sur les $x\in C_N$ on a donc, uniformément en N

$$\sum_{x\in C_N}\frac{|R_j^M h(T_x\omega)|^p}{(2N+1)^3}\leq\sum_{x\in C_N}\frac{|\mathcal{R}_j h_{M+N,\omega}(x)|^p}{(2N+1)^3}+(\|g\|_\infty O(\frac{1}{M}))^p.$$

Le terme de gauche du membre de droite est majoré par

$$\frac{\|\mathcal{R}_j h_{M+N,\omega}\|^p_{L_p(\mathbf{Z}^3)}}{(2N+1)^3},$$

donc d'après la continuité de $\mathcal{R}_j$ par $\|\mathcal{R}_j\|^p_{L_p(\mathbf{Z}^3)}\dfrac{\|h_{M+N,\omega}\|^p_{L_p(\mathbf{Z}^3)}}{(2N+1)^3}$. Pour N tendant vers l'infini, d'après le théorème ergodique ponctuel appliqué à cette majoration, et au membre de gauche de l'inégalité ci-dessus, il existe un ensemble négligeable en dehors duquel

$$\|R_j^M h\|^p_{L_P(\Omega)} \leq \|\mathcal{R}_j\|^p_{L_p(\mathbf{Z}^3)}\|h\|^p_{L_p(\Omega)}+(\|g\|_\infty O(\frac{1}{M}))^p.$$

En laissant enfin tendre M vers l'infini, $R_j^M h$ converge vers $R_j h$ dans $L_\infty(\Omega)$ donc dans $L_p(\Omega)$. Ceci montre la continuité de R_j:

$$\|R_j h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|\mathcal{R}_j\|_{L_p(\mathbf{Z}^3)} \|h\|_{L_p(\Omega)}.$$

On a donc défini R_j comme opérateur continu pour la norme de L_p, sur l'espace des fonctions de la forme $h = \partial_l g$ pour $g \in L_\infty$. Il s'étend par linéarité aux fonctions $h = \sum_{1 \leq l \leq 3} \partial_l g_l$, donc à fortiori aux fonctions $h = \sum_{1 \leq l \leq 3} \partial_l \partial_l^* g$, ce qui achève la preuve du théorème 3.

L'espace L_∞ est dense dans L_p, donc l'opérateur R_j s'étend par continuité à l'espace $\mathrm{Im}\Delta$ des fonctions de la forme $h = \Delta g$ pour $g \in L_p$, puis à son adhérence. Or, pour $p = 2$, Δ est un opérateur autoadjoint, d'où la décomposition $L_2 = \overline{\mathrm{Im}\Delta} \oplus \mathrm{Ker}\Delta$. Comme cela a été vu dans la démonstration de l'unicité de la solution de $(\mathcal{S}')$, la stricte convexité de L_2 entraine que $\mathrm{Ker}\Delta$ est l'espace C des fonctions constantes. Cette décomposition s'étend par densité aux $p \in]1, 2[$, puis par dualité à tout $p > 1$: $L_p = C \oplus \overline{\mathrm{Im}\Delta}$. On pose alors R_j nul sur C, ce qui complète sa définition comme opérateur continu sur L_p tout entier.

L'opérateur R_j^* s'étudie de la même manière, à partir de la fonction r_j^* définie sur $\mathbf{Z}^3$ par

$$r_j^*(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\sqrt{12}} \nabla_j^* p_n(x)$$

avec $\nabla_j^* p_n(x) = p_n(x - e_j) - p_n(x)$.

Il reste à donner l'expression de l'opérateur G de la proposition 1 en fonction de R_j. Pour cela on utilise les deux lemmes suivants:

Lemme 1. – *Pour tout $g \in L_\infty$, on a $R_j \partial_l g(\omega) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^3} \nabla_l r_j(x) g(T_{-x}\omega)$, la somme étant normalement convergente.*

Ce lemme à été démontré au passage dans la démonstration du théorème 3.

Lemme 2. – *On a les propriétés suivantes:*

(a) ∂_k et ∂_k^* commutent avec R_j et R_j^*;

(b) On a les jeux d'indice suivants: $R_j \partial_k = R_k \partial_j$ et $R_j^* \partial_k^* = R_k^* \partial_j^*$;

(c) pour tout $f \in L_p$, $(R_1^* f, R_2^* f, R_3^* f) \in \mathcal{E}_p^3$;

(d) pour tout $h \in L_p$ on a $\sum_{1 \leq j \leq 3} R_j R_j^* h = h - E(h)$.

Démonstration. Ces propriétés sont claires sur C. Il suffit donc d'après la construction de R_j de les vérifier pour les fonctions h de la forme $h = \Delta g$ avec $g \in L_\infty$. La première découle de la définition donné dans le théorème B et de la commutation évidente des opérateurs ∂_k et ∂_k^* avec R_j^M et $R_j^{M^*}$. La seconde se déduit du lemme 1 et des égalités $\nabla_k r_j = \nabla_j r_k$ et $\nabla_k^* r_j^* = \nabla_j^* r_k^*$. D'après ces deux premières propriétés, on a pour tout $l \in \{1,2,3\}$

$$(R_j^*(\partial_l^* \partial_l g))_{1\leq j\leq 3} = (\partial_j^*(R_l^* \partial_l g))_{1\leq j\leq 3} \in \mathcal{E}_p^3.$$

Donc, en sommant en l cela devient $(R_j^*(\Delta g))_{1\leq j\leq 3} \in \mathcal{E}_p^3$, ce qui démontre la propriété (c). La démonstration de (d) est un peu plus longue. D'après (a) on a $R_j R_j^* \partial_l \partial_l^* g = R_j \partial_l (R_j^* \partial_l^* g)$. Or $R_j^* \partial_l^* g \in L_\infty$, donc le lemme 1 s'applique deux fois, et pour $l \in \{1,2,3\}$ on a:

$$\sum_{1\leq j\leq 3} R_j R_j^* \partial_l \partial_l^* g(\omega) \quad = \quad \sum_{1\leq j\leq 3} \Big(\sum_{y\in \mathbf{Z}^3} \nabla_l r_j(y) \big(\sum_{z\in\mathbf{Z}^3} \nabla_l^* r_j^*(z) g(T_{-y-z}\omega)\big)\Big).$$

La série double est absolument convergente car $\nabla_l r_j(x) = O(\frac{1}{\|x\|^4})$, donc c'est encore égale à

$$\sum_{x\in\mathbf{Z}^3} \Big(\sum_{1\leq j\leq 3} \nabla_l r_j \star \nabla_l^* r_j^* \Big)(x) g(T_{-x}\omega).$$

La transformé de Fourier de $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} r_j \star r_j^*$ en θ vaut $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} \hat{r}_j(\theta)\overline{\hat{r}_j(\theta)}$, ce qui d'après l'expression de $\hat{r}_j$ calculée plus haut, est égale à 1. Ceci montre que $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} r_j \star r_j^* = \delta$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} \nabla_l r_j \star \nabla_l^* r_j^* = \nabla_l \nabla_l^* \delta$. En utilisant cette égalité pour calculer la somme en x ci-dessus, on voit que celle-ci vaut $\partial_l \partial_l^* g(\omega)$. Enfin, en sommant en l, cela devient $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq 3} R_j R_j^* \Delta g = \Delta g$, ce qui montre bien (d).

Le lemme 2 permet de vérifier aisément l'expression suivante de l'opérateur G.

Définition. – L'opérateur G de la proposition 1 est défini par $G(h_1,h_2,h_3) = (R_1^* f, R_2^* f, R_3^* f)$ avec $f = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq 3} R_k h_k$.

La continuité de G dans $(L_p)^3$ se déduit alors de celle de R_j dans L_p.

Bibliographie.

[1] D. Boivin. *Weak Convergence For Reversible Random Walks In A Random Environment.* The Annals Of Probability Vol .21,No. 2427-1440,(1993)

[2] D. Boivin & Y. Derriennic. *The Ergodic Theorem For Additive Cocycles of* $\mathbf{Z}^d$ *or* $\mathbf{R}^d$. Ergod. Theory & Dynamical Systems. 11 (1991), 19-39.

[3] J. Depauw *Théorème ergodique ponctuel pour cocycle de degré deux.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p.87-90 (1997).

[4] H. Flanders. *Infinite Networks:I-Resistive Networks.* IEEE Transactions on Circuit Theory. Vol. CT-18, No. 3, May (1971).

[5] K. Golden & G. Papanicolaou. *Bounds For Effective Parameters Of Heterogeneous Media By Analytic Continuation.* Comm. Math. Phys. 90, p. 473-491, (1983).

[6] S.M. Koslov. *The Method Of Averaging And Walks In Inhomogeneous Environments.* Russian Math. Surveys 40, p. 73-145, (1985).

[7] G. Lawler. *Intersections Of Random Walks.* Birkhaűser (1991).

[8] F. Spitzer. *Principles of Random Walks.* Springer-Verlag (1976).

[9] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press (1970).

[10] E.M. Stein & G. Weiss. *Introduction To Fourier Analysis On Euclidean Spaces.* Princeton University Press. (1971).

[11] N. Wiener. *The Ergodic Theorem.* Duke Math. J. 5 (1939), 1-18.

[12] A.H. Zemanian. *Infinite Electrical Networks.* Cambridge Tracts in Math. 101.