

Université François Rabelais Faculté des Sciences et Techniques
Année 2009-2010
Licence de Mathématiques L3- Intégration-2
Première session d'examen

Aucun document autorisé

Question de cours : transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi xk} f(x) dx \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\widehat{f}$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \widehat{f}(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

1 Problème

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit F_n sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$F_n(a, x) = x^{2n} e^{-ax^2} \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

1- Montrer que

$$0 \leq F_1(a, x) \leq \frac{2}{a} F_0\left(\frac{a}{2}, x\right).$$

et que

$$0 \leq F_{n-k}(a, x) \leq \frac{2^k}{a} F_{n-k-1}\left(\frac{a}{2^k}, x\right) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1.$$

En déduire

$$0 \leq F_n(a, x) \leq \left(\frac{2^{(n+1)/2}}{a} \right)^n F_0\left(\frac{a}{2^n}, x\right) \quad \forall (a, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2- Montrer que pour tout $a > 0$, $x \mapsto F_n(a, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose alors

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(a, x) dx.$$

Calculer $I_0(a)$.

3- Montrer que $a \mapsto I_0(a)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression intégrale de $\frac{dI_0}{da}(a)$.
En déduire que

$$I_1(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a^3} \right)^{1/2}.$$

4- Calculer $\frac{\partial F_n}{\partial a}(a, x)$. Montrer que $a \mapsto I_n(a)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\frac{dI_n}{da}(a)$ en fonction de $I_{n+1}(a)$.

5- Montrer par récurrence sur n que

$$I_n(a) = \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n-3) \times (2n-1)}{2^n} \left(\frac{\pi}{a^{2n+1}} \right)^{1/2} \quad \forall n \geq 2.$$

6- On note $F_0(a, x) = F_{0,a}(x)$. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{F_{0,a}}(k)$ et la transformée de Fourier inverse $F_{0,a}^\vee(k)$ de $F_{0,a}$.

7- Calculer la transformée de Fourier de

$$x \mapsto (F_{0,\pi} * F_{0,\pi})(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F_{0,\pi}(y) F_{0,\pi}(x-y) dy.$$

On pourra utiliser la transformée de Fourier inverse.

8- Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on définit par récurrence

$$(F_{0,\pi})^{n*}(x) = \underbrace{F_{0,\pi} * F_{0,\pi} * \dots * F_{0,\pi}}_{n \text{ -fois}}(x).$$

Montrer que

$$(F_{0,\pi})^{n*}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} F_{0,\pi}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

que $x \mapsto e^{-\pi x^2} = F_{0,\pi}(x)$ est invariante par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$, que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ et que $f = (\widehat{f})^\vee$, où on note $f^\vee(k) = \widehat{f}(-k)$.