

Université François Rabelais Faculté des Sciences et Techniques
Année 2008-2009
Licence de Mathématiques L3- Intégration-2
Première session d'examen

Aucun document autorisé

Question de cours : Approximation des transformées de Fourier dans $\mathcal{L}^2$

On désigne par $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) l'espace des fonctions de puissance p-ième intégrable pour la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}_1$ ou dx sur $\mathbb{R}$.

1- En admettant l'identité de Plancherel, à savoir

$$h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \implies N_2(h) = N_2(\widehat{h}),$$

montrer que la transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ s'étend de façon unique en une isométrie linéaire de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

2- On désigne par I_ℓ l'intervalle $[-\ell, \ell]$ et χ_{I_ℓ} sa fonction caractéristique. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f - \chi_{I_\ell} f|^2 dx = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\ell}^{\ell} e^{-2i\pi \langle x, k \rangle} f(x) dx - \widehat{f}(k) \right|^2 dk = 0.$$

1 Premier exercice

Dans cet exercice dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1- Soit $p \in [1, \infty)$. Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha > 0$ la fonction

$$x \mapsto f_\alpha(x) = \frac{1}{(1+x^2)^\alpha}$$

appartient-elle à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$?

2- Montrer que la fonction

$$z \mapsto \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

est bien définie pour $z > 0$. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Montrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

3- Montrer, par une intégration par parties qu'on justifiera, que

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} x^z e^{-x} dx \quad \forall z > 0.$$

En déduire, en justifiant l'utilisation du théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = 1.$$

2 Deuxième exercice

1- Soit e_α ($\alpha > 0$) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$. On pose $f_\alpha(x) = x e_\alpha(x)$.

a) Montrer rigoureusement que $\widehat{e_\alpha}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{d\widehat{e_\alpha}}{dk}(k) = -2i\pi \widehat{f_\alpha}(k).$$

b) Montrer que

$$\widehat{f_\alpha}(k) = -\frac{i\pi k}{\alpha} \widehat{e_\alpha}(k).$$

On justifiera les intégrations par parties sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire la formule

$$\frac{d\widehat{e_\alpha}}{dk}(k) = -\frac{2\pi^2 k}{\alpha} \widehat{e_\alpha}(k).$$

2- Montrer, en intégrant l'équation différentielle précédente, que

$$\widehat{e_\alpha}(k) = \widehat{e_\alpha}(0) e^{-\pi^2 k^2 / \alpha}.$$

En déduire la valeur explicite de $\widehat{e_\alpha}(k)$. On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$,

$$\underbrace{(e_\pi * e_\pi \dots * e_\pi)}_{n\text{-fois}}(k) = e_{n\pi}(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

4- Soit $b > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique χ_{I_b} de l'intervalle $I_b := [-b, b]$. En déduire la formule

$$\widehat{e_\pi * \chi_{I_b}}(k) = \frac{\sin(2\pi kb)}{\pi k} e_\pi(k).$$