

Université François Rabelais Faculté des Sciences et Techniques
Année 2009-2010
Licence de Mathématiques L3- Intégration-2
Deuxième session d'examen

Aucun document autorisé

1 Exercice sur la régularisation par convolution

Soit $\{\eta_n\}$ une suite de fonctions positives et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support dans l'intervalle $[-n^{-1}, n^{-1}]$ et telles que

$$\int_{-n^{-1}}^{n^{-1}} \eta_n dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_*.$$

1- Montrer directement que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

$$(f * \eta_n)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \eta_n(t) dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

2- Montrer que $f * \eta_n$ est une fonction de classe C^∞ (on démontrera d'abord que $f * \eta_n$ est continue).

3- On suppose que f est **uniformément** continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f * \eta_n$ converge vers f **uniformément** sur $\mathbb{R}$ quand $n \rightarrow \infty$.

2 Exercice sur l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Dans cet exercice dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et l'espace $\mathcal{L}^2$ est relatif à cette mesure. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $I_n = [n, n+1]$. On désigne par χ_n la fonction caractéristique de I_n . Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, constante sur chaque intervalle I_n et soit a_n la valeur de f sur I_n . Pour $\ell \in \mathbb{N}_*$, on pose

$$f_\ell(x) = \sum_{-\ell \leq n \leq \ell} a_n \chi_n(x).$$

1- Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(x) \chi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

et en déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\ell^2 dx = \sum_{-\ell \leq n \leq \ell} a_n^2.$$

Montrer que

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ell}^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dx = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n^2,$$

quantité qui peut-être finie ou infinie.

2- On suppose que $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_{\ell})^2 dx = \sum_{-\infty < n < -\ell} a_n^2 + \sum_{\ell < n < +\infty} a_n^2.$$

En déduire que la suite $\{f_{\ell}\}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\ell \rightarrow +\infty$.

3- Montrer que

$$\hat{\chi}_n(k) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xk} \chi_n(x) dx = \frac{\sin \pi k}{\pi k} e^{-(2n+1)i\pi k}.$$

.

4- Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\chi}_n(k) \overline{\hat{\chi}_n(k)} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

5- On suppose $m \neq n$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\chi}_n(k) \overline{\hat{\chi}_m(k)} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} e^{2(m-n)it} dt.$$

6- Déduire du 1- et du théorème de Plancherel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} e^{2(m-n)it} dt = 0 \quad \text{si } m, n \in \mathbb{N}_*, m \neq n.$$