

Université François Rabelais Faculté des Sciences et Techniques
Année 2008-2009
Licence de Mathématiques L3- Intégration-2
Deuxième session d'examen

Aucun document autorisé

Question de cours : inégalité de Hölder

Soient $p \in]1, \infty[$ et $p' = p/(p-1)$.

1- Montrer que pour tout $a \geq 0, b \geq 0$, on a

$$a^{1/p} b^{1/p'} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'}$$

2- Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{L}_\mu^p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}_\mu^{p'}(\Omega)$. Montrer, en choisissant judicieusement a et b , que l'on a

$$\left| \int_\Omega fg \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p'}.$$

1 Premier exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{|\sin x|}}.$$

1- Si $k \in \mathbb{N}$, montrer que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|\sin x|}}$ est intégrable sur $]k\pi, (k+1)\pi[$. Montrer qu'il existe une constante c , indépendante de k telle que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) dx \leq \frac{c}{k^2\pi^2 + 1}$$

En déduire que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda^1)$.

2- Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On pose $S = \{a_n + k\pi : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - a_n) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus S.$$

Montrer que g est mesurable pour la mesure de Lebesgue, puis que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda^1)$ (on étudiera chaque terme de la série définissant g) et en déduire l'expression de $N_1(g)$ en fonction de $N_1(f)$.

2 Deuxième exercice

1- Montrer que pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose alors

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

Donner la valeur explicite de $f(0)$.

2- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. Montrer que

$$f'(x) - f(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \quad \forall x > 0$$

3- Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-y} \int_0^{+\infty} e^{-yt^2} dt dy. \quad \forall x > 0$$

4- Déduire de ce qui précède et en faisant des changements de variables appropriés, que

$$f(0) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = 2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^2.$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$.