

Examen Partiel : 11 mars 2011
Durée : 2 heures. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours:

Enoncer le théorème de Fubini Lebesgue pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1

Le but de l'exercice est de vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(1) Vérifier que :

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx dy = \frac{\pi^2}{2}.$$

(2) En déduire que

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$(Indication: \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{x^2 - 1} \left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y} \right).)$$

(3) Vérifier que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$$

$$\text{et en déduire que } \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

(4) Vérifier que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$$

$$(Indication: \int_0^1 x^{2n} \ln(x) dx = \frac{-1}{(2n+1)^2}),$$

et en déduire que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Attention à bien justifier tous les calculs !!

Exercice 2

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $p \in [1, +\infty]$. On pose:

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(y) dy.$$

(1) Vérifier que : $F(x) = (f * g)(x)$ où $g = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x)$.

(2) Montrer que si $p \in]1, +\infty]$, alors

$$F(x) \in L^p(\mathbb{R}) \text{ et } \|F\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall p \in]1, +\infty].$$

(3) Montrer que si $p = 1$, alors

$$F(x) \in \bigcap_{q \in [1, +\infty[} L^q(\mathbb{R}) \text{ et } \|F\|_q \leq \|f\|_1 \quad \forall q \in [1, +\infty[.$$

(4) Montrer (**en détail !**) que si $p \in [1, +\infty[$, alors $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = 0$.

(Indication: on pourra commencer par montrer que pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \rightarrow +\infty$ on a $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} F(x_n) = 0$).

(5) Si $p = +\infty$ a-t-on encore $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = 0$?