

Feuille 6

Définition 1. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **mesurable** (relativement à Σ) si pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau

$$S_f(t) = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}$$

est mesurable, c'est à dire appartient à Σ .

Exercice 1. Soit (Ω, Σ) un espace mesurable. Pour $A \subset \Omega$ on définit $\mathbb{I}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que la fonction $\mathbb{I}_A$ est mesurable ssi l'ensemble A est mesurable.

Indication : Soit $f(t) = \mathbb{I}_A(t)$. Déterminer l'ensemble $S_f(t)$ suivant les valeurs de t (c'est-à-dire pour $t < 0$, $0 \leq t \leq 1$ et $t > 1$).

Exercice 2. Démontrer que si $\Sigma = \{\Omega, \emptyset\}$, alors seules les fonctions constantes sont mesurables par rapport à cette sigma-algèbre.

Exercice 3. Soient (Ω, Σ) un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables définies sur cet espace.

Démontrer que $\{x \in \Omega \mid \text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge}\}$ est une partie mesurable de Ω (c'est-à-dire un élément de Σ).

Indication : on pensera à caractériser la convergence par le critère de Cauchy.

Proposition 2. 1. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, alors $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ et

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si la fonction f admet une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur I , alors f est Lebesgue intégrable sur I et les valeurs des deux intégrales sont les mêmes.

Théorème 3 (de Lebesgue ou convergence dominée).

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions intégrables telle que

(i) la suite (f_n) converge presque partout vers une fonction f (c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe pour presque tout x)

(ii) il existe une fonction positive $g \in \mathbb{L}^1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ μ -presque partout.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$.

On peut remplacer dans ce théorème l'expression “ (f_n) une suite de fonctions intégrables” par “ (f_n) une suite de fonctions mesurables”. Pourquoi ?

Exercice 4. Soient Ω un ensemble non vide, $a \in \Omega$ et $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$. On note δ_a la mesure définie

$$\text{par } \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

1. Soit f une fonction mesurable positive, établir que $\int_{\Omega} f d\delta_a = f(a)$.

2. On note δ_1 la mesure de Dirac au point 1 et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\int_{[0,1]} (3x^2 + 1) d\delta_1(x)$, $\int_{[0,1]} (3x^2 + 1) d\delta_1(x)$, $\int_{[0,1]} (3x^2 + 1) d\lambda(x)$.

Indication : 1. Démontrer le résultat d'abord pour une fonction indicatrice, ensuite pour une fonction étagée (puisque toute une fonction étagée est le combinaison linéaire des fonctions indicatrices) et enfin pour une fonction mesurable positive (puisque toute fonction mesurable positive est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives).

Exercice 5. Démontrer que la fonction indicatrice des rationnels sur $[0, 1]$ est intégrable au sens de Lebesgue.

Exercice 6. Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives, telle que $\int_{\Omega} f_0 d\mu < +\infty$.

1. Démontrer que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f , alors f est mesurable positive et $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu < +\infty$.
2. Démontrer que l'hypothèse $\int_{\Omega} f_0 d\mu < +\infty$ est nécessaire.
3. Que devient cette assertion lorsque $f_n = \mathbb{I}_{A_n}$, où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de Σ ?

Indications : 1. Considérer la suite $(f_0 - f_n)_{n \geq 1}$ et utiliser le théorème de convergence monotone.

2. Prendre, par exemple, $(E, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f_n = \mathbb{I}_{[n, +\infty[}$.

3. Démontrer qu'on a alors l'égalité suivante : $\mu(\cap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ (propriété de la continuité décroissante de la mesure).

Exercice 7. Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\Omega} f_n d\mu \leq M$, où M est une constante donnée. Démontrer que $\int_{\Omega} f d\mu \leq M$.

Indication : Utiliser le lemme de Fatou.

Exercice 8. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et μ une mesure finie. Soit f une fonction positive et telle que $\int_{\Omega} f^2 d\mu < +\infty$.

1. En décomposant Ω suivant la partition $\{f < 1\}, \{f \geq 1\}$, montrer que $\int_{\Omega} f d\mu < +\infty$.
2. Démontrer par un exemple que l'hypothèse " μ mesure finie" est nécessaire.

Indications : 1. Écrire $0 \leq f \leq f^2 \mathbb{I}_{\{f \geq 1\}} + \mathbb{I}_{\{f < 1\}}$ puis intégrer.

2. Prendre, par exemple, $(E, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ et $f(x) = \frac{1}{x} \mathbb{I}_{[1, +\infty[}(x)$.