

## Feuille 5

**Exercice 1.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. On considère  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$  et  $C$  et  $D$  deux sous-ensembles de  $F$ . Montrer que

- (1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
- (2)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ , dans quel cas on a l'égalité ?
- (3)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$  .      (4)  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$  .

**Exercice 2.** Démontrer que l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{A \subset E \mid A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable} \}.$$

est une sigma-algèbre sur  $E$  (une tribu de  $E$ ).

**Exercice 3.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ .

Décrire la sigma-algèbre (tribu) engendrée par  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 4.** Sigma-algèbre (tribu) image réciproque.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application et  $\mathcal{B}$  une sigma-algèbre (tribu) de parties de  $F$ .

Démontrer que  $f^{-1}(\mathcal{B})$  définie par  $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$  est une sigma-algèbre (tribu) de parties de  $E$ .

**Exercice 5.** On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $x \mapsto x^2$  et  $I$  l'intervalle  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{T}$  la plus petite sigma-algèbre (tribu) de parties de  $\mathbb{R}$  dont  $I$  soit élément.

Décrire  $\mathcal{T}$ ,  $f(\mathcal{T})$ ,  $f^{-1}(\mathcal{T})$ ,  $f^{-1}(f(\mathcal{T}))$ ,  $f(f^{-1}(\mathcal{T}))$ .

Lesquels de ces ensembles sont des sigma-algèbres (tribus) ?

**Exercice 6.** Démontrer que la sigma-algèbre (tribu) de Borel du plan  $\mathbb{R}^2$  est engendré par la famille des pavés ouverts

$$\{]a, b[ \times ]c, d[ \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}.$$

**Exercice 7.** Soit  $\mu$  une mesure sur un clan (sur une algèbre)  $\mathcal{C}$  (resp. sur une tribu (sur une sigma-algèbre)) de parties d'un ensemble  $E$ .

(1) Démontrer que, pour tous  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ .

(2) Démontrer que, pour tous  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

(3) Démontrer que, pour tous  $A, B, C \in \mathcal{C}$ ,

$$\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

**Exercice 8.** Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des parties de  $X$ . Pour toute partie  $A$  de  $X$ , on pose

•  $\mu_1(A) = 0$  si  $A$  est au plus dénombrable,  $\mu_1(A) = +\infty$  si  $A$  est infini non dénombrable,

•  $\mu_2(A) = \text{Card } A$  si  $A$  est au plus dénombrable,  $\mu_2(A) = 0$  si  $A$  est infini non dénombrable.

Parmi les  $\mu_i$ , lesquels sont des mesures sur  $(X, \mathcal{P})$  ?

**Exercice 9.** Soient  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{T}$ .

1. Démontrer que

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

2. On suppose que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$ . Démontrer que

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = 0.$$

Traduire ce fait de la façon suivante : pour  $\mu$ -presque tout élément  $x$  de  $E$ , il existe un entier  $n(x)$  tel que, pour tout entier  $m \geq n(x)$ , on a  $x \notin A_m$ .