

Feuille 3

Exercice 1. Soit α une fonction croissante sur $[a, b]$. Calculer $\int_a^b 1 d\alpha$.

Exercice 2. (extrait du partiel 2009)

(1) Démontrer *la première formule de la moyenne* :

Soient f une fonction continue et α une fonction croissante sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(c) (\alpha(b) - \alpha(a)).$$

(2) En déduire que si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et si a et b sont deux réels strictement positifs, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Exercice 3. Soit α une fonction croissante sur $[0, \pi]$ telle que

$$\int_0^\pi \sin x d\alpha(x) = \alpha(\pi) - \alpha(0).$$

Démontrer que $\alpha(x) = \alpha(0)$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\alpha(x) = \alpha(\pi)$ si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Exercice 4. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann sur $[0, 1]$?

i) $\frac{1}{1 + \sin^2 x},$

et

ii) $x \mapsto \begin{cases} \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 5. Sommes de Riemann.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et P une partition finie de $[a, b]$: $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$. On note $\sigma(P) = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$ le pas de la partition P et, si $T = (t_1, \dots, t_n)$ avec $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, on pose

$$S(P, T, f) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ on a

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

Déterminer les limites si elles existent des suites suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} ; & (2) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2 + n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} ; \\ (3) \left(\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^{p-1}(k+1) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}, p > 1 ; & (4) \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}_{n \in \mathbb{N}^*} ; \\ (5) \left(\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} ; & (6) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{n-k}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}. \end{array}$$