

Feuille 2

Exercice 1.

- (1) Pour chacune des intégrales suivantes donner la condition sur le réel α pour que l'intégrale converge (une démonstration pour chaque cas est demandée).

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

- (2) Même question pour

$$(a) \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad \text{et} \quad (b) \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} dt.$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbb{R}$, un ensemble non vide borné supérieurement. Soit B l'ensemble des opposés des éléments de A :

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A, x = -y\}.$$

Montrer que B est borné inférieurement et que $\inf B = -\sup A$.

L'intégrale de Riemann- Stieltjes

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et P une partition finie de $[a, b]$: $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles et bornée, on pose

$$M_j = \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \quad \text{et} \quad m_j = \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x)$$

Soit α une fonction croissante sur $[a, b]$ et $P \in \mathcal{P}(a, b)$, où $\mathcal{P}(a, b)$ est l'ensemble des partitions P de $[a, b]$. On note $\Delta\alpha_j = \alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})$ ($j = 1, \dots, n$) et

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{j=1}^n M_j \Delta\alpha_j \quad \text{et} \quad L(P, f, \alpha) = \sum_{j=1}^n m_j \Delta\alpha_j.$$

Définition 1. Si

$$\int_a^b f d\alpha = \inf \{ U(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}(a, b) \} = \sup \{ L(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}(a, b) \} = \int_a^b f d\alpha$$

on note $\int_a^b f d\alpha$ la valeur commune, c'est l'intégrale de Riemann-Stieltjes de la fonction f sur $[a, b]$ et on dit que f est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes sur $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}(a, b; \alpha)$).

Théorème 2. La fonction f est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partition P de $[a, b]$ telle que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq \epsilon.$$

Remarque : Si $\alpha(x) = x$, on retrouve l'intégrale de Riemann.

Exercice 3. Démontrer que la fonction indicatrice des rationnels sur $[0, 1]$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 4. (On sait qu'une fonction réglée définie sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable. La réciproque est fausse comme le montre ce contre-exemple)

On définit la fonction f sur $[0, 1]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- (1) Démontrer que f n'est pas une fonction réglée sur $[0, 1]$, c'est-à-dire, que f ne peut pas être approchée de manière uniforme par des fonctions en escalier.
- (2) Démontrer que f est Riemann-intégrable.

Exercice 5. Soit f une fonction réelle bornée sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction f est intégrable au sens de Riemann-Stieljes sur $[a, b]$ par rapport à une constante c et calculer $\int_a^b f(t) dc$.

Exercice 6. On pose $\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Soient $a < 0 < b$ et f une fonction bornée sur $[a, b]$. Démontrer que si f est continue en 0, alors $f \in \mathcal{R}(a, b; \alpha)$ et $\int_a^b f d\alpha = f(0)$.

Exercice 7. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a, b]$ de la droite réelle. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f . Démontrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et que

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Le résultat précédent est faux si la convergence uniforme est remplacée par la convergence simple, comme le montrent les deux exemples suivants sur $[0, 1]$:

1. La suite (f_n) définie par $f_n(x) = n$ si $x \in]0, 1/n[$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
2. Construire une suite de fonctions, toutes nulles en dehors d'un ensemble fini, et qui converge simplement vers la fonction indicatrice des rationnels.