

Feuille 1

Définition 1

- Deux ensembles sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.
- Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exemple 2 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, $n \mapsto n + 1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Proposition 3 Soient E un ensemble dénombrable et A une partie de E . Alors A est finie ou dénombrable. *On dit alors que A est au plus dénombrable.*

Attention : l'expression "au plus dénombrable" peut varier selon les cours et les livres, car certains auteurs considèrent aussi les ensembles finis comme dénombrables.

Proposition 4

1 Soient F un ensemble dénombrable, E un ensemble et f une injection de E sur F . Alors E est au plus dénombrable.

2 Soient E un ensemble dénombrable, F un ensemble et f une surjection de E sur F . Alors F est au plus dénombrable.

Exercice 1 Démontrer la proposition 4.

Exercice 2

1. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers est dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

Proposition 5 Si E et F sont des ensembles dénombrables alors $E \cup F$ l'est aussi.

Proposition 6 Tout produit cartésien d'une famille finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve : Soient E et F deux ensembles dénombrables. Il existe une bijection f de E sur $\mathbb{N}$ et une bijection g de F sur $\mathbb{N}$. Définissons:

$$h : E \times F \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto (f(x), g(y)).$$

Cette application est bijective de $E \times F$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui est dénombrable. Donc $E \times F$ est dénombrable.

Une récurrence permet d'étendre ce résultat au produit cartésien de toute famille finie d'ensembles dénombrables. ■

Exercice 3 Démontrer que l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4

1. Soit $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles ouverts non-vides et deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$. Montrer qu'alors A est nécessairement dénombrable.
2. Ecrire $\mathbb{N}^c$ comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
3. Soit f une fonction réelle monotone définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exemple d'une fonction monotone sur $[0, 1]$ dont l'ensemble des points de discontinuité est infini : $\arctan \left(E \left(\frac{1}{x} \right) \right)$.

Théorème 7 Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable (car indexée par $\mathbb{N}$) d'ensembles dénombrables. Pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe une bijection $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$.

On pose $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, (n, m) \mapsto f_n(m)$. Démontrons que g est une surjection de $\mathbb{N}^2$ sur A .

Soit $a \in A$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \in A_n$. Soit $m = f_n^{-1}(a)$. On a donc $g(n, m) = f_n(f_n^{-1}(a)) = a$ donc g est surjective.

D'après la proposition 4, A est au plus dénombrable. Comme $A_0 \subset A$ et que A_0 est infini, A est donc infini donc dénombrable. ■

Théorème 8 Tout intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide est non dénombrable.

Théorème 9 Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.